Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann

7. Übungsblatt

Fragen zu den Aufgaben: Uwe Motschmann, Raum A312, Tel.: 391-5186, u.motschmann@tu-bs.de

Stichworte: Trägheitskräfte, Koordinatentransformation

15. **Trägheitskräfte**

Im Lokalen Inertialsystem IS' ist die Bewegung eines kräftefreien Massenpunkts gegeben durch

$$\frac{d^2 x^{i'}}{d\tau^2} = 0 \quad . \tag{1}$$

Es soll überprüft werden, dass die Formulierung der Gleichung in einem beliebigen Nicht-Inertialsystem KS die bekannten Trägheitskräfte enthält. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(a) Zeigen Sie, dass Gleichung (1) in KS mit den Koordinaten ξ^i

$$\frac{d^2 \xi^i}{d\tau^2} = -\Gamma^i_{jk} \frac{d\xi^j}{d\tau} \frac{d\xi^k}{d\tau} \tag{2}$$

lautet.

(b) Betrachten Sie als KS ein rotierendes Koordinatensystem mit $\xi^1 = x$, $\xi^2 = y$, $\xi^3 = z$, $\xi^4 = ct$, d.h.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t' & \sin\omega t' \\ -\sin\omega t' & \cos\omega t' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{3}$$

sowie $z' = z$ und $t' = t$. Die gestrichenen Größen bezeichnen die Koordinaten des lokalen Inertialsystems IS'. Lösen Sie nach x' und y' auf und bestimmen Sie die vollständigen Differentiale dx' und dy'.

(c) Berechnen Sie nun das Wegelement ds^2 in KS und lesen Sie den metrischen Tensor g_{ij} ab.

(d) Bestimmen Sie die Christoffel-Symbole über die Geodätengleichung, wobei als Kurvenparameter die Eigenzeit τ zu benutzen ist. Geben Sie nun die resultierenden Trägheitkräfte an.

Bemerkung: Wenn die Christoffel-Symbole aus der Geodätengleichung abgelesen werden sollen, müssen die zweiten Ableitungen entkoppelt sein. Die Entkopplung entspricht dem Schritt von Gleichung (II.166) zu (II.167) innerhalb der Ableitung der allgemeinen Geodätengleichung im Skript.

(e) Zeigen Sie, dass für $v \ll c$ die in (d) bestimmten Trägheitskräfte zu den bekannten Ausdrücken für die Zentrifugal- und Corioliskraft führen.

Bitte wenden⟶

16. **Isotrope Koordinaten**

Überführen Sie die Schwarzschild-Metrik von den Standard-Koordinaten $(r, \vartheta, \varphi, ct)$ in isotrope Koordinaten $(\rho, \vartheta, \varphi, ct)$ mittels der Transformation

$$r = \left(1 + \frac{r_G}{4\rho}\right)^2 \rho \quad . \tag{4}$$