


11. Hüpfender Ball
(7 Punkte)

Ein Ball der Masse M fällt aus der Höhe h_0 zu Boden und wird reflektiert. Ein leichter Ball mit $m \ll M$ folgt ihm in kurzem Abstand hinterher, der aber lange genug ist, dass der schwerere Ball seinen Stoßvorgang mit dem Boden abgeschlossen hat und gerade wieder nach oben fliegt, wenn der leichtere Ball zentral auf ihn trifft. Die Fallhöhe des leichteren Balls bis zum Auftreffen auf den Schwereren soll ebenfalls h_0 sein. Die Ausdehnung der Bälle sei vernachlässigbar.

- Bis zu welcher Höhe wird der leichtere Ball reflektiert, wenn ideal elastische Stöße angenommen werden?
- Inelastische 'Verluste' werden durch einen Koeffizienten α berücksichtigt, der das Verhältnis der Geschwindigkeiten vor und nach den Stößen angibt ($0 \leq \alpha \leq 1$). Wie klein darf α nur sein, damit der leichtere Ball seine Anfangshöhe wieder erreicht?

Hinweis: Beachten Sie die drei Abschnitte der Bewegung, vor dem Stoß des großen Balls mit dem Boden, nach diesem Stoß und vor dem Stoß mit dem kleinen Ball, und nach dem finalen Stoß des großen mit dem kleinen Ball. Transformieren Sie für den Stoß ins Schwerpunktsystem Σ' . Die Reflexion am Boden führt zu einem Vorzeichenwechsel in der Geschwindigkeit.

12. Schwingung gekoppelter Massenpunkte
(6 Punkte)

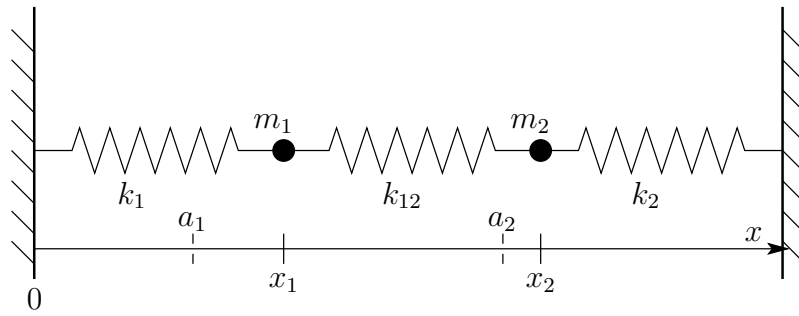
Zwei Massen m_1 und m_2 seien untereinander und mit zwei festen Wänden durch Federn verbunden (s. Skizze). Die Bewegung erfolge nur in x_1 -Richtung. Wir unterdrücken diesen Komponentenindex "1" und benennen die x -Koordinaten der Massenpunkte m_1 und m_2 mit x_1 und x_2 . Die Gleichgewichtslagen der beiden Massen seien a_1 und a_2 und k_1, k_2, k_{12} die Federkonstanten. Dabei gelte

$$m_1 = \frac{1}{2}m_2 = m \quad \text{und} \quad k_{12} = \frac{1}{5}k_2 = \frac{1}{2}k_1 = k.$$

- Welche Kräfte wirken auf die beiden Massen?
- Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen.
- Berechnen Sie die Eigenfrequenzen ω der gekoppelten Schwingungen.

Hinweis zu (c): Führen Sie als neue Koordinaten die Abweichungen aus den Ruhelagen ein, also $\tilde{x}_1 = x_1 - a_1$, $\tilde{x}_2 = x_2 - a_2$. Für die Lösung des in (b) gefundenen Gleichungssystems eignet sich der Ansatz $\tilde{x}_i = b_i \cos \omega t$. Diskutieren Sie die Bedingung für die Existenz nichttrivialer Lösungen für das resultierende lineare algebraische Gleichungssystem für b_1 und b_2 .

Bitte wenden →



13. Lenz-Runge-Vektor

(7 Punkte)

Wir betrachten ein Potential der Form

$$V(r) = \frac{\lambda}{r^\alpha} \quad \text{mit} \quad \lambda, \alpha = \text{const} \quad . \quad (1)$$

Für ein solches Potential ist durch

$$\underline{A} = \dot{\underline{x}} \times \underline{L} + V(r)\underline{x} \quad (2)$$

der *Lenz-Runge-Vektor* $\underline{A}$ definiert. Es sei $r = |\underline{x}|$ und $\underline{L}$ der Drehimpuls.

- (a) Zeigen Sie, dass der Lenz-Runge-Vektor nur für $\alpha = 1$ eine Erhaltungsgröße ist.
- (b) Berechnen Sie das Skalarprodukt $\underline{A} \cdot \underline{x}$. Stellen Sie *mit Hilfe Ihres Ergebnisses* die Bahngleichung des Keplerproblems ($\alpha = 1$) in der Form

$$r(\phi) = \frac{k}{1 + \epsilon \cos \phi} \quad (3)$$

auf.

Hinweis: Es empfiehlt sich das Spatprodukt für den Term $(\dot{\underline{x}} \times \underline{L}) \cdot \underline{x}$ auszunutzen.