

**18. Entropie und Information****(8 Punkte)**

Wir betrachten eine Reihe von Ereignissen E_n ($n = 1, 2, \dots, N$), die mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten p_n mit

$$\sum_n p_n = 1 \quad (1)$$

treten können. Wir ordnen nun der Feststellung eines Ereignisses E_n einen Informationswert I_n zu, bei häufiger Wiederholung von solchen Feststellungen an der gleichen Reihe von Ereignissen erhält man dann einen mittleren Informationsgehalt, festgelegt als

$$I = - \sum_n p_n \log_2 p_n. \quad (2)$$

Diese Definition ist so gewählt, dass sie die mittlere Anzahl von einfachen Alternativfragen (Ja oder Nein, 0 oder 1) angibt, die zur vollständigen Charakterisierung eines Ereignisses der Reihe nach gestellt und beantwortet werden müssen.

Beispiele:

- (1) $N = 1$. Ein Ereignis tritt mit Sicherheit ein, $p_n = 1$. In diesem Fall ist $I = 0$. Man gewinnt keine Information, da der Eintritt des Ereignisses von vornherein feststeht.
- (2) $N = 2$. $p_1 = p_2 = 1/2$. Beide Ereignisse treten mit der gleichen Wahrscheinlichkeit ein. Durch Einsetzen erhält man¹ $I = 1$ bit.

Aufgaben:

- (a) Der rote Dino aus der E-Dynamik hält sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit von $p_n = 1/128$ auf den 128 Fliesen am Boden eines rechteckigen Raumes, der doppelt so lang wie breit ist, auf. Wie groß ist die mittlere Information der Feststellung des Aufenthaltsorts²?
- (b) Erinnert die Definition der Information nicht an die Entropie? Schreiben Sie in einem Satz, warum größere Entropie mit mehr Information zu identifizieren ist.
- (c) Ein Fabrikant möchte 3000 Tafeln Schokolade (Vollmilch, Zartbitter und weiße Schokolade) produzieren. Wieviele Tafeln von jeder Sorte muss er herstellen, wenn er möglichst viele verkaufen will, über die Beliebtheit der verschiedenen Sorten allerdings keine Erhebungen angestellt hat. Versuchen Sie zuerst durch Argumentieren auf ein Ergebnis zu kommen und berechnen Sie dann die Information dieser Verteilung.
- (d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_n , unter denen die Information (2) maximal wird. Berücksichtigen Sie dabei etwaige Nebenbedingungen.
- (e) Stellen Sie eine Analogie zur Thermodynamik (Entropie, Ensembles,...) her.

Bitte wenden →

¹bit ist die Einheit der Information und entspricht einer 0 oder 1 Entscheidung.

²Man sieht, dass in der Definition von I keine Bewertung der Information (etwa nützlich - unnützlich) enthalten ist.

19. Thermodynamische Relationen**(9 Punkte)**

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Thermodynamischen Relationen:

(a)
$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial V}\right)_{\tau, N} = -\left(\frac{\partial p}{\partial N}\right)_{\tau, V}$$

(b)
$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial V}\right)_{\tau, N} = \left(\frac{\partial p}{\partial \tau}\right)_{V, N}$$

(c)
$$\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{\tau, V} - \mu = -\tau \left(\frac{\partial \mu}{\partial \tau}\right)_{N, V}$$

(d)
$$\left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_{\tau, N} = -\frac{1}{k_B} \tau V \left(\alpha^2 + k_B \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \tau}\right)_{p, N}\right)$$

Hierbei bezeichnet k_B die Boltzmannkonstante und α den *thermischen Ausdehnungskoeffizienten*, der durch $\alpha = \frac{k_B}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial \tau}\right)_p$ gegeben ist.

20. Legendre-Transformation**(3 Punkte)**

Bestimmen Sie jeweils die Legendre-Transformierte

(a) $\eta(\xi)$ für $y(x) = \exp(x - 1)$;

(b) $\eta(x_1, \xi)$ für $y(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3$;

(c) Bestimmen Sie auch die zu der Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \frac{m}{2} \underline{\dot{q}}^2 + \underline{A}(\underline{q}) \cdot \underline{\dot{q}}$$

gehörende Hamilton-Funktion $\mathcal{H}(\underline{p}, \underline{q})$.