Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dr. M. Feyerabend

Thermodynamik und Quantenstatistik — WS 2017/18

6. Übungsblatt — Abgabe: 30. November bis 9:45 Uhr im Kasten vor 3.317

Fragen zu den Aufgaben: Moritz Feyerabend, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, m.feyerabend@tu-bs.de

15. **Entropie und Information** **(8 Punkte)**

Wir betrachten eine Reihe von Ereignissen E_n $(n = 1, 2, \dots, N)$, die mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten p_n mit

$$\sum_n p_n = 1 \tag{1}$$

eintreten können. Wir ordnen nun der Feststellung eines Ereignisses E_n einen Informationswert I_n zu, bei häufiger Wiederholung von solchen Feststellungen an der gleichen Reihe von Ereignissen erhält man dann einen mittleren Informationsgehalt, festgelegt als

$$I = -\sum_n p_n \log_2 p_n. \tag{2}$$

Diese Definition ist so gewählt, dass sie die mittlere Anzahl von einfachen Alternativfragen (Ja oder Nein, 0 oder 1, Links oder Rechts, Oben oder Unten) angibt, die zur vollständigen Charakterisierung eines Ereignisses der Reihe nach gestellt und beantwortet werden müssen. Information ist also zu verstehen im Sinne von fehlender Information, die notwendig ist, um ein Ereignis eindeutig festzustellen.

Beispiele:

(1) $N = 1$. Ein Ereignis tritt mit Sicherheit ein, $p_1 = 1$. In diesem Fall ist $I = 0$. Man gewinnt keine Information, da der Eintritt des Ereignisses von vornherein feststeht. Es fehlt somit keine Information, um das Ereignis festzustellen. Es gibt nur ein Ereignis.

(2) $N = 2$. $p_1 = p_2 = 1/2$. Beide Ereignisse treten mit der gleichen Wahrscheinlichkeit ein. Durch Einsetzen erhält man[1] $I = 1$bit. Es fehlt also 1bit an Information, um festzustellen, ob Ereignis 1 oder Ereignis 2 vorliegt.

Aufgaben:

(a) Ein roter Dino hält sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit von $p_n = 1/128$ auf einer der 128 Fliesen am Boden eines rechteckigen Raumes, der doppelt so lang wie breit ist, auf. Wie groß ist der mittlere (fehlende) Informationsgehalt der Feststellung des Aufenthaltsorts[2]?

(b) Erinnert die Definition der Information nicht an die Entropie? Schreiben Sie in einem Satz, warum größere Entropie mit mehr fehlender Information zu identifizieren ist.

(c) Ein Fabrikant möchte 3000 Tafeln Schokolade (Vollmilch, Zartbitter und weiße Schokolade) produzieren. Wieviele Tafeln von jeder Sorte muss er herstellen, wenn er möglichst viele verkaufen will, über die Beliebtheit der verschiedenen Sorten allerdings keine Erhebungen angestellt hat. Versuchen Sie zuerst durch Argumentieren auf ein Ergebnis zu kommen und berechnen Sie dann die Information dieser Verteilung.

(d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_n, unter denen die fehlende Information (2) maximal wird. Die Ereignisse seien nicht durch mögliche Kopplungen oder äussere Einwirkungen beeinflusst. Berücksichtigen Sie dabei etwaige Nebenbedingungen.

(e) Stellen Sie eine Analogie zur Thermodynamik (Entropie, Ensembles,...) her.

Bitte wenden ⟶

[1] bit ist die Einheit der Information und entspricht einer 0 oder 1 Entscheidung.
[2] Man sieht, dass in der Definition von I keine Bewertung der Information (etwa nützlich - unnütz) enthalten ist.

16. **Thermodynamische Relationen** **(9 Punkte)**

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Thermodynamischen Relationen:

(a) $\left(\frac{\partial \mu}{\partial V}\right)_{\tau,N} = -\left(\frac{\partial p}{\partial N}\right)_{\tau,V}$

(b) $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial V}\right)_{\tau,N} = \left(\frac{\partial p}{\partial \tau}\right)_{V,N}$

(c) $\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{\tau,V} - \mu = -\tau\left(\frac{\partial \mu}{\partial \tau}\right)_{N,V}$

(d) $\left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_{\tau,N} = -\frac{1}{k_B}\tau V\left(\alpha^2 + k_B\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \tau}\right)_{p,N}\right)$

Hierbei bezeichnet k_B die Boltzmannkonstante und α den *thermischen Ausdehnungskoeffizienten*, der durch $\alpha = \frac{k_B}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial \tau}\right)_p$ gegeben ist.

17. **Legendre-Transformation** **(3 Punkte)**

Bestimmen Sie jeweils die Legendre-Transformierte

(a) $\eta(\xi)$ für $y(x) = \exp(x-1)$;

(b) $\eta(x_1, \xi)$ für $y(x_1, x_2) = x_1^2\, x_2^3$;

(c) Bestimmen Sie die zu der Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}\left(\underline{q}, \dot{\underline{q}}\right) = \frac{m}{2}\dot{\underline{q}}^2 + \underline{A}\left(\underline{q}\right)\cdot\dot{\underline{q}}$$

gehörende Hamilton-Funktion $\mathcal{H}\left(\underline{p}, \underline{q}\right)$.