



17. **Bogenlänge**

11 Punkte

In dieser Aufgabe soll die Berechnung von Linienintegralen geübt werden.

- (a) Durch die Parametrisierung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

wird eine *Zykloide* beschrieben. Skizzieren Sie den Verlauf der Kurve in der (x, y) -Ebene und berechnen Sie deren Länge.

- (b) Verfahren Sie analog mit der *logarithmischen Spirale*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ct} \cos t \\ e^{ct} \sin t \end{pmatrix} ; \quad c \neq 0 ; \quad 0 \leq t \leq \pi$$

Skizzieren Sie für $0 < c \ll 1$.

- (c) Im dreidimensionalen Raum wird durch

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos(t) \\ \rho \sin(t) \\ at \end{pmatrix} ; \quad \rho > 0 ; \quad a \neq 0 ; \quad 0 \leq t \leq h$$

eine *Helix* beschrieben. Berechnen Sie auch hierzu die Länge.

- (d) **Fakultativ**

3 Zusatzpunkte

Die *Astroide (Sternkurve)* wird beschrieben durch

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos^3 t \\ a \sin^3 t \end{pmatrix} ; \quad a > 0 ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi .$$

Berechnen Sie auch hier die Länge.

18. **Masse eines Kreisrings**

4 Punkte

Die Linienmassendichte eines Kreisrings mit Radius $R > 0$ und dem Mittelpunkt im Nullpunkt sei gegeben durch

$$\rho(x, y) = \rho_0 \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} ; \quad \rho_0 > 0 .$$

Berechnen Sie die Gesamtmasse des Rings.

19. Dreidimensionale Linienintegrale

5 Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y, z) = 8x \cos(y) - 7z^{\frac{3}{2}} + 3xz - e^{\sqrt{y}} \quad .$$

Berechnen Sie die Kurvenintegrale entlang folgender Wege (Wege = direkte Verbindungsgeraden genannter Punkte):

- $C_1: (0, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 1)$
- $C_2: (0, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 1) \quad .$