Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dr. M. Feyerabend

6. Übungsblatt — Abgabe: 4. Mai 2017 bis 9.40 Uhr im Kasten vor 3.317

Fragen zu den Aufgaben: Moritz Feyerabend, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, m.feyerabend@tu-bs.de

8. **Periheldrehung** **(8 Punkte)**

Ein Planet der Masse m bewegt sich in einem zentralsymmetrischen Potential $V(\varrho)$, in dessen Ursprung die Sonne steht. Die Bewegung verläuft im Endlichen, es liegt also der „gebundene Fall“ vor.

(a) Zeigen Sie, dass die Änderung des Polarwinkels φ zwischen sonnennächstem und sonnenfernstem Punkt ($\varrho_{\min}$ und ϱ_{max}) gegeben ist durch

$$\Delta\varphi = -m\frac{\partial}{\partial L}\int\limits_{\varrho_{\min}}^{\varrho_{\max}} \sqrt{\frac{2}{m}(U-V) - \frac{L^2}{m^2\varrho^2}}\, d\varrho \qquad . \tag{1}$$

(b) Für den Fall $V(\varrho) = -\gamma mM/\varrho$ ergeben sich bekanntermaßen geschlossene Ellipsen, $\Delta\varphi$ ist demnach gerade π oder bei einem vollen Umlauf gerade 2π. Fügt man eine kleine, zentralsymmetrische Störung ins Potential ein

$$V(\varrho) = V_0(\rho) + V_1(\rho) = -\gamma\frac{mM}{\varrho} + V_1(\varrho) \quad , \quad V_1 \ll V_0 \quad , \tag{2}$$

so beschreibt der Körper immer noch näherungsweise Ellipsen, deren Halbachsen sich jedoch bei jedem Umlauf nicht mehr nur um $2\Delta\varphi = 2\pi$, sondern um den Winkel $2\Delta\varphi = 2\pi + \delta\varphi$ verdrehen (Periheldrehung).

Bestimmen Sie die Periheldrehung , indem Sie die Wurzel gemäß $\sqrt{a+x} \approx \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}x$ entwickeln. Sie sollten als Ergebnis

$$\Delta\varphi \approx \pi + m\frac{\partial}{\partial L}\int\limits_0^{\pi} \frac{\rho^2}{L}V_1 \mathrm{d}\varphi \tag{3}$$

erhalten.

(c) Berechnen Sie die Periheldrehung konkret für ein Störpotential der Form
$V_1(\varrho) = -\alpha/\rho^2$.

Anmerkung: Solche Störterme treten in der Realität tatsächlich auf, z.B. durch die Abplattung der Sonne aufgrund ihrer Eigenrotation, durch die Gravitation von Jupiter oder auch durch allgemein relativistische Effekte. Wie man am Ergebnis sieht, ist die Periheldrehung umso größer, je kleiner die Masse des Planeten ist, daher wurde sie auch zuerst beim Merkur beobachtet und war eine der ersten experimentellen Bestätigungen der Relativitätstheorie.

Bitte wenden ⟶

9. **Kometenbahn** **(5 Punkte)**

Ein Komet bewegt sich auf einer parabolischen Bahn im Gravitationsfeld der ruhenden Sonne. Seine Bahnebene fällt mit der Ebene der als kreisförmig anzunehmenden Erdbahn zusammen. Der Perihelabstand beträgt ein Drittel des Erdbahnradius $R_E = 1.49 \cdot 10^{11}$ m. Wie lange bewegt sich der Komet innerhalb der Erdbahn, wenn die Störung der Kometenbahn durch die Planeten vernachlässigt wird?

Hinweis: Stellen Sie zunächst eine allgemeine Formel für die gesuchte Zeit auf. Setzen Sie erst dann Zahlenwerte ein.

10. **Stabilität von Kreisbahnen** **(7 Punkte)**

Ein Massenpunkt m bewegt sich in einem Zentralkraftfeld $\underline{F}\left(\underline{x}\right) = F\left(r\right)\underline{e}_r$. Wenn für die ebene Bewegung $z = 0$ gewählt wird, schreibt sich auch $F\left(\underline{x}\right) = F(\rho)\underline{e}_\rho$.

(a) Welche Bedingung muss die Funktion $F\left(r\right)$ in Abhängigkeit vom Drehimpuls erfüllen, damit Kreisbahnen mit dem Radius R möglich sind? *Hinweis:* Für eine Kreisbahn gilt $\rho = R$ und $\dot{\rho} = 0$.

(b) Betrachten Sie nun kleine Auslenkungen $\delta\rho$ (also $\rho = R + \delta\rho$) und finden Sie eine weitere Bedingung an die Funktion $F\left(r\right)$, für die diese Kreisbahnen auch stabil sind.

(c) Wenden Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe (b) auf den Spezialfall eines Kraftfeldes der Form

$$F\left(r\right) = -\frac{K}{r^n} \qquad \text{mit} \qquad K, n = \text{const} \tag{4}$$

an und stellen Sie eine Bedingung an die Konstante n auf.

(d) *Fakultative Zusatzaufgabe ohne Bepunktung:*
Welche r-Abhängigkeit würden Sie erwarten für die Gravitationskraft in einem Universum mit 4 räumlichen Dimensionen. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis aus (c) in diesem Kontext.

Hinweis zu (b): Betrachten Sie das Newton-Grundgesetz in Polarkoordinaten und wählen Sie die ρ-Komponente aus. Für die Darstellung der Beschleunigung in Zylinderkoordinaten erinnern Sie sich an die entsprechende Übungsaufgabe. Setzen Sie nun $\rho = R\left(1 + \frac{\delta\rho}{R}\right)$ ein und entwickeln alle ρ-abhängigen Terme in eine Taylor-Reihe bis zur ersten Ordnung in $\delta\rho$ bzw. $\frac{\delta\rho}{R}$. Das Ausnutzen der Reihensumme der Geometrischen Reihe ist hilfreich. Sie sollten eine Differentialgleichung für $\delta\rho$ vom Typ eines ungetriebenen harmonischen Oszillators erhalten. Diskutieren Sie, unter welcher Bedingung die Lösung nicht beliebig anwächst und somit stabil bleibt. Beliebiges Anwachsen von $\delta\rho$ bedeuted, dass die durch R charakterisierte Kreisbahn instabil ist.