Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
P. Meier, M. Sc.

5. Übungsblatt Abgabe: 15. Mai 2015 bis 14 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: P. Meier, Raum A223, Tel.: 391-5189, patrick.meier@tu-bs.de

10. **Abhängigkeit der Erdbeschleunigung von der Geographischen Breite** **(10 Punkte)**

Wir betrachten ein Inertialsystem Σ, dessen Ursprung mit dem Erdmittelpunkt zusammenfällt, und ein rotierendes System Σ', dessen Ursprung auf der Erdoberfläche liegt. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass dann für die Kraft im bewegten System gilt

$$m\,d_t'^2\underline{x}' = \underline{F} - m\,\underline{a}_{tr} - m\,d_t'\underline{\omega}\times\underline{x}' - m\,\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{x}') - 2\,m\,\underline{\omega}\times d_t'\underline{x}' \quad . \tag{1}$$

Hiervon ausgehend wollen wir nun die Schwerebeschleunigung $\underline{g}$ in Abhängigkeit vom Breitengrad θ bestimmen. Es soll dabei sowohl die Abplattung der Erde infolge der Erdrotation als auch die Zentrifugalkraft berücksichtigt werden.

(a) Wir nehmen an, dass im Inertialsystem nur die Schwerkraft wirkt. Zeigen Sie, dass man dann (1) umschreiben kann zu

$$m\,d_t'^2\underline{x}' = m\underline{g} - m\,d_t'\underline{\omega}\times\underline{x}' - m\,\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{x}') - 2\,m\,\underline{\omega}\times d_t'\underline{x}' \quad . \tag{2}$$

mit

$$\underline{g} = -\gamma\frac{M_{Erde}}{R^2}\frac{\underline{R}}{|\underline{R}|} - \underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{R}) \quad .$$

$\underline{R}$ bezeichnet hierbei den Vektor zur Erdoberfläche. Machen Sie sich dazu anhand der Herleitung von Gleichung (1) klar, wie man $\underline{a}_{tr}$ umschreiben könnte.

(b) Bestimmen Sie die Schwerebeschleunigung $\underline{g}$ in Abhängigkeit von der geographischen Breite θ. Dazu soll die Erde als Ellipsoid mit den Halbachsen $a = r_{\text{Pol}}$ und $b = c = r_{\text{Äquator}}$ betrachtet werden.

(c) Berechnen Sie $|\underline{g}|$ für den Pol, den Äquator und Braunschweig bei $\theta = 52.2667°$.
Es ist $\gamma = 6.674\cdot 10^{-11}\text{m}^3/(\text{kg s}^2)$, $M_{Erde} = 5.974\cdot 10^{24}\text{kg}$, $r_{\text{Pol}} = 6357\text{km}$ und $r_{\text{Äquator}} = 6378\text{km}$.

(d) Wie schnell müsste sich die Erde drehen, damit man am Äquator schwerelos wäre?

11. **Präzises Zielen** **(10 Punkte)**

Lässt man einen Gegenstand von einem Turm fallen, so fällt dieser aufgrund der Erdrotation nicht ganz senkrecht nach unten, sondern wird durch die Corioliskraft nach Osten hin abgelenkt (Reibungskräfte seien vernachlässigt). Das System Σ' wird daher so gewählt, dass x' nach Süden, y' nach Osten und z' senkrecht zur Oberfläche von der Erde weg zeigt.

(a) Die Größe dieser Abweichung soll in erster Ordnung bzgl. der Erdrotationskreisfrequenz ω abgeschätzt werden, d.h. alle Terme, die ω^2 oder höhere Potenzen von ω enthalten, sollen vernachlässigt werden. Zudem soll ω als zeitlich konstant angenommen werden. Zeigen Sie, dass sich das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\ddot{x}' &= 2\omega\sin\theta\,\dot{y}'\\ \ddot{y}' &= -2\omega\,(\cos\theta\,\dot{z}' + \sin\theta\,\dot{x}')\\ \ddot{z}' &= -g + 2\omega\cos\theta\,\dot{y}'\end{aligned}$$

ergibt, wobei θ den Breitengrad bezeichnet.

Bitte wenden ⟶

(b) Lösen Sie das System, indem Sie die Gleichungen integrieren und dann ineinander einsetzen. Die Anfangsbedingungen sollen entsprechend eines Massenpunktes mit Anfangshöhe h und Anfangsgeschwindigkeit Null gewählt werden. Zur Vereinfachung der Ergebnisse nehmen Sie $\omega t \ll 1$ an und entwickeln Sie sin und cos. Für y' erhalten Sie so die erwähnte Ostabweichung durch die Corioliskraft.

Hinweis: Für die Lösung der verbleibenden gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ist der direkte Ansatz mittels sin- und cos-Funktionen gegenüber dem Ansatz mit der exp-Funktion von Vorteil (Vgl. Rechenmethodenskript Abschnitt Differentialgleichungen 2.2.2.).

(c) Wie groß ist in Braunschweig die Ostabweichung durch die Corioliskraft bei einem Fall aus 50 m Höhe?