5. Übungsblatt

Fragen zu den Aufgaben: Uwe Motschmann, Raum A312, Tel.: 391-5186, u.motschmann@tu-bs.de

Stichworte: Kovariante Ableitung, Parallelverschiebung, Christoffelsymbole

12. **Kovariante Ableitung**

(a) Bestimmen Sie allgemein die kovariante Ableitung eines *ko*varianten Tensors 1. Stufe, d.h. $V_{i\ ||j}$. Gehen Sie aus von

$$V^i_{\ ||j} = V^i_{\ |j} + \Gamma^i_{jk} V^k \quad . \tag{1}$$

(b) Beweisen Sie die Produktregel

$$(v_i w_j)_{||k} = v_{i||k} w_j + v_i w_{j||k} \tag{2}$$

(c) Zeigen Sie, dass die kovariante Ableitung eines kovarianten Tensors der 2. Stufe $T_{ij\ ||k}$ wie folgt gegeben ist:

$$T_{ij\ ||k} = T_{ij\ |k} - T_{lj}\Gamma^l_{ik} - T_{il}\Gamma^l_{jk}. \tag{3}$$

Gehen Sie von den in (a) und (b) bewiesenen Beziehungen aus.

13. **Parallelverschiebung**

Das kovariante Differential

$$Dv^i = dv^i - \delta v^i = dv^i + \Gamma^i_{jk} v^j d\xi^k \tag{4}$$

beschreibt die infinitesimale Änderung der kontravarianten Komponenten des Tensors 1. Stufe $\underline{v}$ im selben Ereignis P, d.h. die Komponenten im Nachbarpunkt $\overline{P}$ werden in der Basis von P betrachtet. Hierbei ist

$$\delta v^i = -\Gamma^i_{jk} v^j d\xi^k \tag{5}$$

die Änderung der v^i bei *Parallelverschiebung* um $d\xi^k$. Der Vektor $\underline{v}$ wird von $\underline{v}(\overline{P})$ um „$d\xi$“ nach $\underline{v}(P)$ 'zurückverschoben‘.

(a) Wir betrachten ebene Polarkoordinaten (ρ, φ) und die Punkte $P = (\rho_0, 0)$, $Q = (\rho_0, \pi/2)$, $R_1 = (\epsilon, \pi/2)$ und $R_2 = (\epsilon, 0)$. (x, y) sind kartesische Koordinaten.

i. Drücken Sie den Tensor 1. Stufe $\underline{v} = \underline{e}_x$ in der kovarianten Basis der Polarkoordinaten aus.

ii. Berechen Sie explizit

$$\int_P^Q dv^\rho,\ \int_P^Q dv^\varphi,\ \int_P^Q \delta v^\rho, \text{ und} \int_P^Q \delta v^\varphi$$

bei Parallelverschiebung des Tensors 1. Stufe $\underline{v}$ von P nach Q.

Bitte wenden ⟶

iii. Bestimmen Sie außerdem

$$\oint \delta v^\rho \text{ und} \oint \delta v^\varphi$$

für den Weg $P \to Q \to R_1 \to R_2 \to P$.

iv. Interpretieren Sie ihr Ergebnis.

(b) Betrachten wir nun die Parallelverschiebung auf einer Kugeloberfläche (ϑ, φ) für den Vektor $\underline{v} = -\underline{e}_\vartheta$ und den Weg $(\pi/2, 0) \to (\pi/2, \pi/2) \to (\epsilon, \pi/2) \to (\epsilon, 0) \to (\pi/2, 0)$. Berechnen Sie analog

$$\oint \delta v^\vartheta \text{ und} \oint \delta v^\varphi$$

entlang des angegebenen Weges und interpretieren Sie das Ergebnis.

(c) Berechnen Sie nun die Parallelverschiebung allgemein beim Umlauf um ein infinitesimales Parallelogramm aufgespannt durch (ϑ_0, φ_0), $(\vartheta_0, \varphi_0 + d\varphi)$, $(\vartheta_0 + d\vartheta, \varphi_0)$ und $(\vartheta_0 + d\vartheta, \varphi_0 + d\varphi)$. Als Ergebnis sollten Sie erhalten

$$\sum \delta v^i \approx \pm v^k d\vartheta d\varphi \; R^i_{k\vartheta\varphi} \quad , \tag{6}$$

wobei $\pm$ vom Umlaufsinn abhängt und der *Krümmungstensor* R^i_{kmn} gegeben ist durch

$$R^i_{jkl} = \Gamma^i_{jk|l} - \Gamma^i_{jl|k} + \Gamma^m_{jk}\Gamma^i_{ml} - \Gamma^m_{jl}\Gamma^i_{mk} \quad . \tag{7}$$