Prof. Dr. U. Motschmann
Dr. M. Feyerabend

5. Übungsblatt — Abgabe: keine Abgabe

Fragen zu den Aufgaben: Moritz Feyerabend, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, m.feyerabend@tu-bs.de

7. **Das Ideale Gas**

In der Vorlesung wurde ein Ausdruck für die freie Energie des Standardplasmas abgeleitet. Um die dabei verwendeten Begriffe der Thermodynamik noch einmal zu vergegenwärtigen, werde der einfachere Fall eines Idealen Gases betrachtet.

(a) Was ist eine Zustandssumme? Worin unterscheiden sich die kanonische und die großkanonische Zustandssumme und welche Bedingungen gelten für die jeweils betrachteten Systeme?

(b) Die kanonische Zustandssumme eines Idealen Gases bestehend aus N Teilchen ist gegeben durch:

$$Z = \frac{1}{h^{3N} N!} \int dp_x^N \, dp_y^N \, dp_z^N \, dq_x^N \, dq_y^N \, dq_z^N \, e^{-\frac{H}{k_B T}} \tag{1}$$

mit der Hamiltonfunktion H für N freie (ununterscheidbare) Teilchen:

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{n=1}^{N} \left(p_{x,n}^2 + p_{y,n}^2 + p_{z,n}^2 \right) \tag{2}$$

Dabei wird mit p und q der Ort und Impuls der Teilchen im Phasenraum bezeichnet.

- Was wird durch den Faktor $1/h^{3N}$ berücksichtigt?
- Warum ist der Faktor $1/N!$ nötig?

(c) Werten Sie das Integral aus. Es sollte sich

$$Z = \frac{1}{N!} \left(V \sqrt{\frac{m k_B T}{2\pi\hbar^2}}^{\,3} \right)^N \tag{3}$$

ergeben. Der Ausdruck $n_Q = \sqrt{\frac{m k_B T}{2\pi\hbar^2}}^{\,3}$ wird auch als Quantenkonzentration bezeichnet. Erläutern Sie den Grund dafür.

(d) Die Freie Energie erhält man aus der Zustandssumme: $F(T, N, V) = -k_B T \ln Z$. Berechnen Sie die Freie Energie für das Ideale Gas.

(e) Berechnen Sie daraus mithilfe der Helmholtz-Gleichung $U = F - \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{N,V} T$ die innere Energie U und die Zustandsgleichung des idealen Gases mittels $p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N}$.

(f) Die innere Energie U liegt nun in den Variablen T, N und V vor. Ist U damit ein thermodynamisches Potential? Erläutern Sie.

(g) Nehmen Sie an, dass Sie auf diesem Weg die thermodynamischen Größen eines Plasmas aus Protonen und Elektronen berechnen sollen. Was müsste zusätzlich berücksichtigt werden? Wie würde die Hamiltonfunktion aussehen?

→*Bitte wenden*

8. **Ionisationsgrad**

Gegeben sei ein Plasma aus Protonen, Elektronen und Wasserstoffatomen.

(a) Berechnen Sie den Ionisationsgrad (Anteil der Protonen ohne gebundenes Elektron im Vergleich zur Gesamtanzahl an Protonen) als Funktion der Temperatur und Elektronendichte. Skizzieren Sie ihr Ergebnis.

(b) Berechnen Sie den Ionisationsgrad für die folgenden Parameterbereiche:

- Fusionsplasmen, $T = 10^7$ K, $n_e = 10^{15}$ cm^{-3}
- Lobes des Magnetosphären-Schweifs der Erde, $T = 10^6$ K, $n_e = 10^{-2}$ cm^{-3}
- Sonnenwind $T = 10^5$ K, $n_e = 1$ cm^{-3}
- Interstellarer Staub $T = 10^2$ K, $n_e = 1$ cm^{-3}