



5. Übungsblatt

Fragen zu den Aufgaben: P. Meier, Raum A223, Tel.: 391-5189, patrick.meier@tu-bs.de

11. Parallelverschiebung

Das kovariante Differential

$$Dv^i = dv^i - \delta v^i = dv^i + \Gamma_{jk}^i v^j d\xi^k \quad (1)$$

beschreibt die infinitesimale Änderung der kontravarianten Komponenten des Tensors 1. Stufe  $\underline{v}$  im selben Ereignis  $P$ , d.h. die Komponenten im Nachbarpunkt  $\bar{P}$  werden in der Basis von  $P$  betrachtet. Hierbei ist

$$\delta v^i = -\Gamma_{jk}^i v^j d\xi^k \quad (2)$$

die Änderung der  $v^i$  bei *Parallelverschiebung* um  $d\xi^k$ . Der Vektor  $\underline{v}$  wird von  $\underline{v}(\bar{P})$  um „ $d\xi$ “ nach  $\underline{v}(P)$  'zurückverschoben'.

- (a) Wir betrachten ebene Polarkoordinaten  $(\rho, \varphi)$  und die Punkte  $P = (\rho_0, 0)$ ,  $Q = (\rho_0, \pi/2)$ ,  $R_1 = (\epsilon, \pi/2)$  und  $R_2 = (\epsilon, 0)$ .  $(x, y)$  sind kartesische Koordinaten.

- i. Drücken Sie den Tensor 1. Stufe  $\underline{v} = \underline{e}_x$  in Polarkoordinaten aus.
- ii. Berechnen Sie explizit

$$\int_P^Q dv^\rho, \int_P^Q dv^\varphi, \int_P^Q \delta v^\rho, \text{ und } \int_P^Q \delta v^\varphi$$

bei Parallelverschiebung des Tensors 1. Stufe  $\underline{v}$  von  $P$  nach  $Q$ .

- iii. Bestimmen Sie außerdem

$$\oint \delta v^\rho \text{ und } \oint \delta v^\varphi$$

für den Weg  $P \rightarrow Q \rightarrow R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow P$ .

- iv. Interpretieren Sie ihr Ergebnis.

- (b) Betrachten wir nun die Parallelverschiebung auf einer Kugeloberfläche  $(\vartheta, \varphi)$  für den Vektor  $\underline{v} = -\underline{e}_\vartheta$  und den Weg  $(\pi/2, 0) \rightarrow (\pi/2, \pi/2) \rightarrow (\epsilon, \pi/2) \rightarrow (\epsilon, 0) \rightarrow (\pi/2, 0)$ . Berechnen Sie analog

$$\oint \delta v^\vartheta \text{ und } \oint \delta v^\varphi$$

entlang des angegebenen Weges und interpretieren Sie das Ergebnis.

Bitte wenden  $\longrightarrow$

- (c) Berechnen Sie nun die Parallelverschiebung allgemein beim Umlauf um ein infinitesimales Parallelogramm aufgespannt durch  $(\vartheta_0, \varphi_0)$ ,  $(\vartheta_0, \varphi_0 + d\varphi)$ ,  $(\vartheta_0 + d\vartheta, \varphi_0)$  und  $(\vartheta_0 + d\vartheta, \varphi_0 + d\varphi)$ . Als Ergebnis sollten Sie erhalten

$$\sum \delta v^i \approx \pm v^k d\vartheta d\varphi R_{k\varphi\vartheta}^i \quad , \quad (3)$$

wobei  $\pm$  vom Umlaufsinn abhängt und der *Krümmungstensor*  $R_{kmn}^i$  gegeben ist durch

$$R_{jkl}^i = \Gamma_{jk|l}^i - \Gamma_{jl|k}^i + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{ml}^i - \Gamma_{jl}^m \Gamma_{mk}^i \quad . \quad (4)$$