INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
P. Meier, M. Sc.

5. Übungsblatt Abgabe: 26. November bis 9.40 Uhr im Kasten vor A317

12. **Die n-dimensionale Kugel** **(10 Punkte)**

Durch die Menge

$$\mathcal{K}_n = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \middle| \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq R^2 \right\}$$

wird eine n-dimensionale Kugel vom Radius R beschrieben.

(a) Da für die weitere Rechnung in dieser Aufgabe das Gauß-Integral eine wichtige Rolle spielt, soll dieses hier noch einmal explizit auf einfache Weise nachgerechnet werden. Berechnen Sie dieses, indem Sie folgenden Ansatz wählen

$$(\text{Gauß} - \text{Integral})^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx\, dy$$

und dann Polarkoordinaten nutzen.

(b) Zeigen Sie nun, dass Volumen $V_n(R)$ und Oberfläche $S_n(R)$ einer n-dimensionalen Kugel durch

$$V_n(R) = C_n R^n \quad \text{bzw.} \quad S_n(R) = n C_n R^{n-1} \quad \text{mit} \quad C_n = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

gegeben sind. Die *Gamma-Funktion* $\Gamma(z)$ ist durch

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^{\infty} t^{z-1} \exp(-t)\, \mathrm{d}t$$

definiert. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt die Beziehung $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Für ganzzahliges $n \geq 0$ ist $\Gamma(n+1) = n! = n\Gamma(n)$ und außerdem $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Gehen Sie von dem Integral

$$I = \int f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n \tag{1}$$

aus und wie folgt vor:

i. Setzen Sie zunächst $f(x_1, \ldots, x_n) = 1$ und schreiben Sie mit Gl. (1) das Volumenintegral über $\mathcal{K}_n$ in *kartesischen* Koordianten auf. Suchen Sie nun eine geeignete Substitution, sodass sich das Volumenintegral auf eine Einheitskugel reduziert, welches Sie als C_n bezeichnen können. Nun sollten Sie eine Formel für das Volumen der n-dimensionalen Kugel haben.

ii. Setzen Sie nun $f(x_1, \ldots, x_n) = \exp\left(-(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)\right)$. Bestimmen Sie damit das Integral (1) über $\mathbb{R}^n$ zum einen direkt mithilfe des Ergebnisses aus Aufgabenteil (a) und zum anderen, indem Sie das Integral mithilfe des Ergebnisses aus Aufgabenteil i. auf die Integration über Kugelschalen zurückführen. Hieraus sollten Sie auch die Oberfläche der n-dimensionalen Kugel ablesen können. Durch den Vergleich der beiden Darstellungen des Integrals sollten Sie die explizite Formel für C_n erhalten.

Bitte wenden ⟶

(c) Zeigen Sie außerdem:

$$C_n = \begin{cases} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} & , \quad \text{falls } n \text{ gerade} \\ \\ \frac{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n!!} & , \quad \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

(Doppelfakultät: $n!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$).

13. **Klassisches Teilchen im Kasten** **(5 Punkte)**

Wir betrachten ein System aus einem klassischen Teilchen in einem dreidimensionalen Kasten mit der Kantenlänge L. Dieses Teilchen bewege sich frei im Kasten, d.h. es ist kein Potential im Kasten vorhanden.

(a) Berechnen Sie hierfür das klassische Zustandsintegral.

(b) Berechnen Sie weiterhin die mittlere Energie dieses Systems und interpretieren Sie das Ergebnis.

14. **Harmonischer Oszillator II** **(5 Punkte)**

In Aufagbe 11 wurde ein System aus N unterscheidbaren *quantenmechanischen* Oszillatoren untersucht. Nun wird ein System aus N unterscheidbaren *klassischen* harmonischen Oszillatoren gleicher Frequenz ω betrachtet. Für die Hamilton-Funktion gilt:

$$H(p_1, \ldots, p_N, q_1, \ldots, q_N) = \sum_{\nu=1}^{N} \left(\frac{p_\nu^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q_\nu^2 \right) \quad .$$

(a) Berechnen Sie das klassische Zustandsintegral

$$\mathcal{Z}_{\text{klass}} = \frac{1}{C} \int \exp\left(-\beta H\right) \, \mathrm{d}^N p \, \mathrm{d}^N q$$

sowie die Innere Energie U des Systems.

(b) Zeigen Sie explizit: Wenn die quantenmechanische Zustandssumme im Grenzfall hoher Temperaturen mit dem entsprechenden klassischen Zustandsintegral übereinstimmen soll, muss für die Normierungskonstante gelten: $C = h^N$.