4. Übungsblatt

Fragen zu den Aufgaben: Uwe Motschmann, Raum A312, Tel.: 391-5186, u.motschmann@tu-bs.de

Stichworte: Metrischer Tensor, Volumenelement, Christoffelsymbole

9. **Volumenelement**

Das Volumenelement $d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$ im $\mathbb{R}^3$ ist ein Skalar, jedoch i.a. kein Tensor 0. Stufe. Zu einem Tensor wird es durch

$$dV = \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$$

mit der Determinante des metrischen Tensors $g = \det(g_{ab})$.

Zeigen Sie, dass dV in die bekannten Formeln übergeht für

(a) Kartesische Koordinaten $\xi^1 = x^1, \xi^2 = x^2, \xi^3 = x^3$

(b) Zylinderkoordinaten $\xi^1 = \rho, \xi^2 = \varphi, \xi^3 = z$

(c) Kugelkoordinaten $\xi^1 = r, \xi^2 = \vartheta, \xi^3 = \varphi$

(d) Beweisen Sie nun, dass ein Tensor 0. Stufe vorliegt, also

$$dV = \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = \sqrt{g'} d\xi^{1\prime} d\xi^{2\prime} d\xi^{3\prime} = dV'$$

gilt für beliebige Koordinaten.

Anleitung: Skript Rechenmethoden

10. **Christoffel-Symbole und metrischer Tensor**

(a) Zeigen Sie, das der metrische Tensor g_{ij} die Bedingung $g_{ij\ ||k} = 0$ erfüllt. Formulieren Sie die drei Gleichungen

$$g_{ij\ ||k} = 0 \quad (1)$$
$$g_{ik\ ||j} = 0 \quad (2)$$
$$g_{jk\ ||i} = 0 \quad (3)$$

mit den Christoffel-Symbolen.

(b) Kombinieren Sie die Gl. (1)-(3) und zeigen Sie damit:

$$\Gamma^l_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(g_{ij\ |k} + g_{ik\ |j} - g_{jk\ |i} \right) \quad . \quad (4)$$

Berechnen Sie mit dieser Formel die Christoffelsymbole für

(c) Kartesische Koordinaten im $\mathbb{R}^3$: $\xi^1 = x^1, \xi^2 = x^2, \xi^3 = x^3$

Bitte wenden⟶

(d) Zylinderkoordinaten im $\mathbb{R}^3: \ \xi^1 = \rho, \xi^2 = \varphi, \xi^3 = z$

(e) den 2d Einheitszylinder $\rho = 1: \ \xi^1 = \varphi, \xi^2 = z$

(f) Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3: \ \xi^1 = r, \xi^2 = \vartheta, \xi^3 = \varphi$

(g) die S2-Sphäre (Oberfläche der Einheitskugel $r = 1$): $\xi^1 = \vartheta, \xi^2 = \varphi$

Anleitung: Beschaffen Sie sich die jeweiligen metrischen Tensoren, z.B. aus Aufgabe 2a.

11. **Metrischer Tensor der 3d-Hyperkugel**

Berechnen Sie das Linienelement ds^2 auf der 3d-Hyperkugel mit Radius $r = R$ im Euklidischen 4d-Raum (definiert als alle Punkte mit Abstand R zum Ursprung) in generalisierten sphärischen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
x^1 &= r \ \sin\alpha \sin\vartheta \sin\phi \\
x^2 &= r \ \sin\alpha \sin\vartheta \cos\phi \\
x^3 &= r \ \sin\alpha \cos\vartheta \\
x^4 &= r \ \cos\alpha
\end{aligned}$$

mit $\alpha \in \{0, \pi\}, \ \vartheta, \phi \in \{0, 2\pi\}$.