Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. U. Motschmann
Dr. P. Meier
M. Feyerabend, M.Sc.

THEORETISCHE MECHANIK SS 2016

4. Übungsblatt Abgabe: 28. April 2016 bis 09.40 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: P. Meier, Raum A223, Tel.: 391-5189, patrick.meier@tu-bs.de

8. **Erzwungene Schwingung** **(4 Punkte)**

Ein Kraftzentrum bewegt sich gegenüber einem Inertialsystem Σ gemäß

$$\underline{x}_0(t) = \hat{x} \sin \Omega t \, \underline{e}_1$$

und zieht einen Massenpunkt mit einer Kraft an, die proportional zum Abstand vom Kraftzentrum ist.

(a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung des Massenpunktes in einem System Σ', dessen Ursprung sich mit dem Kraftzentrum mitbewegt und dessen Achsen parallel zu denen von Σ sind und nicht rotieren.

(b) Die erhaltene Bewegungsgleichung ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und einer zeitabhängigen Inhomogenität. Lösen Sie zunächst die homogene Differentialgleichung (also ohne den explizit zeitabhängigen Term) und versuchen Sie dann einen Ansatz für die inhomogene Lösung zu raten. Die Anfangsbedingungen seien $x'(t = 0) = x'_0$ und $\dot{x}'(t = 0) = 0$.

9. **Bewegung in verschiedenen Koordinatensystemen** **(10 Punkte)**

Σ und Σ' seien zwei kartesische Koordinatensysteme mit parallelen Achsen, die sich relativ zueinander bewegen. Die Position eines Teilchens ist zu einer beliebigen Zeit t in Σ beschrieben durch

$$\underline{x}(t) = \left(6\mu_1 t^2 - 4\mu_2 t\right) \underline{e}_1 - 3\mu_3 t^3 \underline{e}_2 + 3\mu_4 \underline{e}_3 \tag{1}$$

und in Σ' durch

$$\underline{x}'(t) = \left(6\mu_1 t^2 + 3\mu_2 t\right) \underline{e}'_1 - \left(3\mu_3 t^3 - 11\mu_5\right) \underline{e}'_2 + 4\mu_6 t \underline{e}'_3 \quad . \tag{2}$$

(a) Vervollständigen Sie die Bezeichnungen der durchgezogenen Vektorpfeile in der Skizze (Seite 3). Verwenden Sie die Symbole wie in der Vorlesung ($\underline{x}$, $\underline{x}'$, $d\underline{x}$, $d\underline{x}_0$).

(b) Begründen Sie, warum Sie für die differentiellen Vektoren $d\underline{x}$, $d\underline{x}'$, $d\underline{x}_0$ sowohl die kartesische Basis $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ als auch gleichberechtigt die Basis $\{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\}$ benutzen können.

(c) Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit sich Σ' relativ zu Σ bewegt.

(d) Bestimmen Sie, welche Beschleunigung das Teilchen in Σ und Σ' erfährt.

(e) Wenn Σ ein Inertialsystem ist, ist dann auch Σ' ein Inertialsystem?

Bitte wenden ⟶

10. **Konservative Kraftfelder** **(6 Punkte)**

(a) Für welche $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ und $a, b, c \in \mathbb{R}$ sind die Felder

i. $\underline{F}_1(\underline{x}) = (\underline{u} \cdot \underline{x})\underline{v}$

ii. $\underline{F}_2(\underline{x}) = a(x_1 + x_2)\underline{e}_1 + bx_2\underline{e}_2 + cx_3\underline{e}_3$

iii. $\underline{F}_3(\underline{x}) = \frac{1}{r^3}(ax_1\underline{e}_1 + bx_2\underline{e}_2 + cx_3\underline{e}_3)$

konservativ? Bestimmen Sie dafür die Potentiale der Vektorfelder!

(b) Als weiteres Beispiel betrachten wir das Kraftfeld

$$\underline{F}(\underline{x}) = -\frac{x_2}{\varrho^2}\underline{e}_1 + \frac{x_1}{\varrho^2}\underline{e}_2 \qquad \varrho^2 = x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \quad .$$

Zeigen Sie, dass die Rotation von $\underline{F}(\underline{x})$ außerhalb der x_3-Achse verschwindet.

(c) Nun sollte dies also ein konservatives Kraftfeld sein, ist es aber nicht global, sondern nur in einem lokalen (einfach zusammenhängenden) Gebiet, dass die x_3-Achse ($\varrho = 0$) nicht enthält.

Prüfen Sie dies beispielhaft, indem Sie das Wegintegral von $\underline{F}(\underline{x})$ über einen Kreis in der x_1x_2-Ebene um den Ursprung mit Radius R berechnen.

(d) Das Problem liegt offenbar in der Singularität bei $\varrho = 0$ begründet. Alle geschlossenen Wegintegrale, die diese Singularität umschließen, ergeben als Wert 2π, diejenigen, die dies nicht tun, ergeben tatsächlich wieder Null. Überprüfen Sie dies für verschobene Kreise der Form

$$\underline{s}(\phi) = (x_0 + R\cos\phi)\,\underline{e}_1 + R\sin\phi\,\underline{e}_2 \qquad |x_0| > R.$$

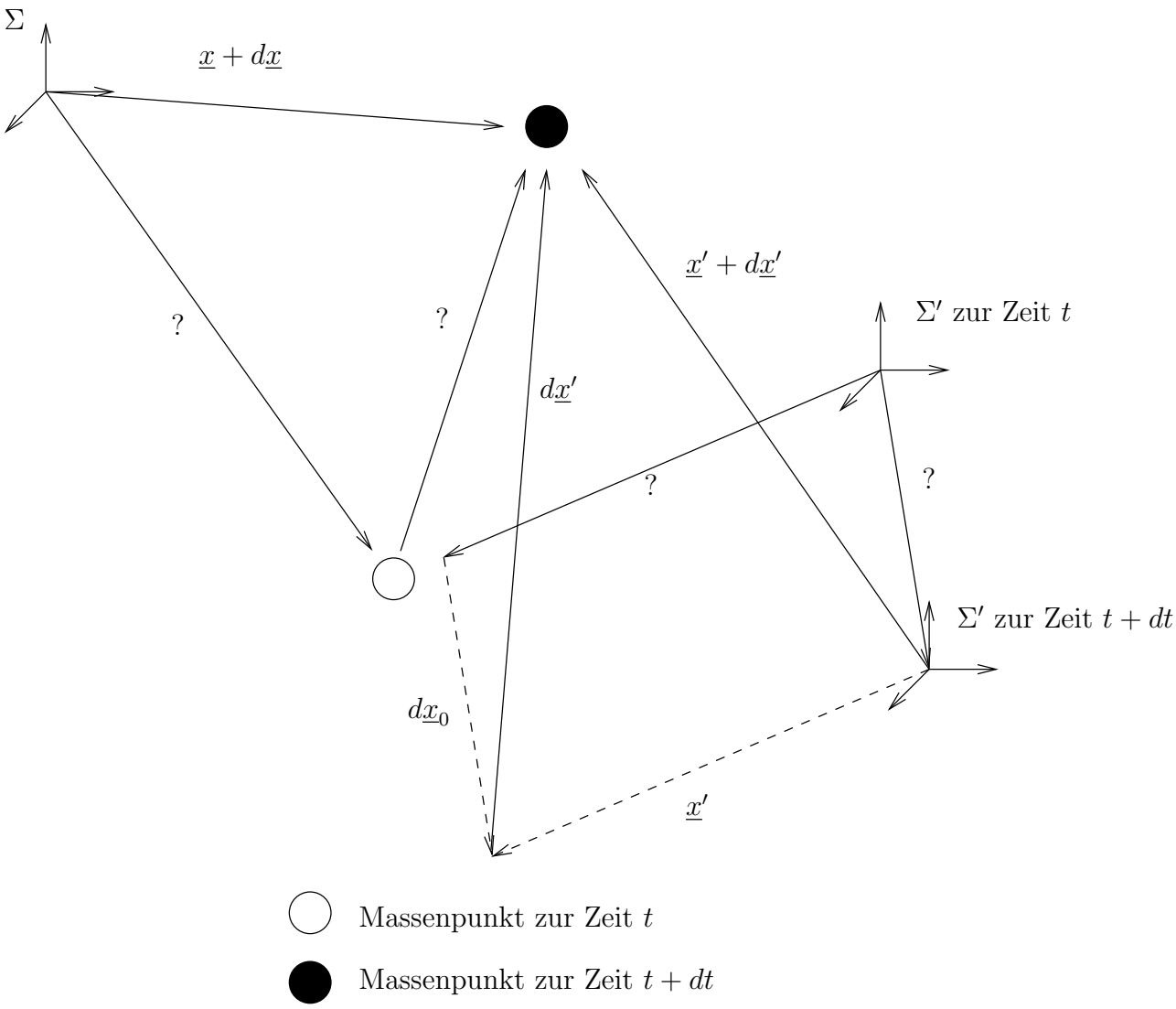
Hinweis: Nutzen Sie die folgenden Stammfunktionen

$$\int \frac{dx}{b + c\cos(ax)} = \frac{2}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \arctan\left(\frac{(b-c)\tan\left(\frac{ax}{2}\right)}{\sqrt{b^2 - c^2}}\right) \quad \text{für} \quad b^2 > c^2$$

und

$$\int \frac{\cos(ax)}{b + c\cos(ax)}dx = \frac{x}{c} - \frac{b}{c}\int \frac{dx}{b + c\cos(ax)}$$

um das auftretende Integral zu lösen. Beachten Sie zudem die Mehrdeutigkeit der Tangensfunktion.


Σ
$\underline{x} + d\underline{x}$
$\underline{x}' + d\underline{x}'$
Σ' zur Zeit t
$d\underline{x}'$
?
?
?
?
Σ' zur Zeit $t + dt$
$d\underline{x}_0$
$\underline{x}'$
Massenpunkt zur Zeit t
Massenpunkt zur Zeit $t + dt$