Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
P. Meier, M. Sc.

4. Übungsblatt

Fragen zu den Aufgaben: P. Meier, Raum A223, Tel.: 391-5189, patrick.meier@tu-bs.de

9. **Christoffel-Symbole und metrischer Tensor**

   (a) Zeigen Sie, das der metrische Tensor g_{ij} die Bedingung $g_{ij\ ||k} = 0$ erfüllt. Formulieren Sie die drei Gleichungen

$$g_{ij\ ||k} = 0 \tag{1}$$
$$g_{ik\ ||j} = 0 \tag{2}$$
$$g_{jk\ ||i} = 0 \tag{3}$$

   mit den Christoffel-Symbolen.

   (b) Kombinieren Sie die Gl. (1)-(3) und zeigen Sie damit:

$$\Gamma^l_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(g_{ij\ |k} + g_{ik\ |j} - g_{jk\ |i} \right) . \tag{4}$$

   (c) Berechnen Sie die Christoffel-Symbole in kartesischen Koordinaten (x^1, x^2) und ebenen Polarkoordinaten (ρ, φ).

   (d) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen der kovarianten Basisvektoren $(\underline{b}_\rho, \underline{b}_\varphi)$ in ebenen Polarkoordinaten mithilfe der Christoffel-Symbole und skizzieren Sie die Änderungen der Basisvektoren.

10. **Kovariante Ableitung**

   (a) Bestimmen Sie allgemein die kovariante Ableitung eines kovarianten Tensors 1. Stufe, d.h. $V_{i\ ||j}$. Gehen Sie aus von

$$V^i_{\ ||j} = V^i_{\ |j} + \Gamma^i_{jk} V^k \quad . \tag{5}$$

   (b) Zeigen Sie, dass die kovariante Ableitung eines kovarianten Tensors der 2. Stufe $T_{ij\ ||k}$ wie folgt gegeben ist:

$$T_{ij\ ||k} = T_{ij\ |k} - T_{lj} \Gamma^l_{ik} - T_{il} \Gamma^l_{jk} . \tag{6}$$

   Gehen Sie von der in (a) bewiesenen Beziehung aus.