Prof. Dr. U. Motschmann
Dr. M. Feyerabend

4. Übungsblatt — Abgabe: 20. April 2017 bis 9.40 Uhr im Kasten vor 3.317

Fragen zu den Aufgaben: Moritz Feyerabend, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, m.feyerabend@tu-bs.de

3. **Abhängigkeit der Erdbeschleunigung von der Geographischen Breite** **(10 Punkte)**

Wir betrachten ein Inertialsystem Σ, dessen Ursprung mit dem Erdmittelpunkt zusammenfällt und dessen $\underline{e}_1$-Achse zur Sonne zeigt und ein bewegtes System Σ', dessen Ursprung auf der Erdoberfläche liegt und welches fest mit der Erdoberfläche verbunden ist. Die Ausrichtung der Koordinatenachsen ist beliebig wählbar. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass dann im bewegten System gilt

$$m\, d_t'^2 \underline{x}' = \underline{F} - m\, \underline{a}_{tr} - m\, d_t'\underline{\omega} \times \underline{x}' - m\, \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}') - 2\, m\, \underline{\omega} \times d_t'\underline{x}' \quad . \tag{1}$$

Die eingeprägte Kraft ist hierbei die Gravitationskraft

$$\underline{F}(\underline{x}') = -\gamma \frac{m\, M_{Erde}}{|\underline{R} + \underline{x}'|^2} \frac{\underline{R} + \underline{x}'}{|\underline{R} + \underline{x}'|} \tag{2}$$

$\underline{R}$ bezeichnet den Vektor vom Ursprung von Σ ($x = 0$) zum Ursprung von Σ' ($x' = 0$). Hiervon ausgehend wollen wir nun die Schwerebeschleunigung $\underline{g}$ nahe der Erdoberfläche in Abhängigkeit vom Breitengrad θ bestimmen. Es soll dabei sowohl die Abplattung der Erde als auch die Zentrifugalkraft berücksichtigt werden.

(a) Zeigen Sie, dass man dann (1) nahe der Erdoberfläche umschreiben kann zu

$$m\, d_t'^2 \underline{x}' = m\underline{g} - m\, d_t'\underline{\omega} \times \underline{x}' - m\, \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{x}') - 2\, m\, \underline{\omega} \times d_t'\underline{x}' \quad . \tag{3}$$

mit

$$\underline{g} = -\gamma \frac{M_{Erde}}{R^2} \frac{\underline{R}}{|\underline{R}|} - \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{R}) \quad .$$

Machen Sie sich dazu anhand der Herleitung von Gleichung (1) klar, wie man $\underline{a}_{tr}$ umschreiben kann.

(b) Bestimmen Sie die Schwerebeschleunigung $\underline{g}$ in Abhängigkeit von der geographischen Breite θ. Dazu soll die Erde als Ellipsoid mit den Halbachsen $a = r_{\mathrm{Pol}}$ und $b = c = r_{\text{Äquator}}$ betrachtet werden.

(c) Berechnen Sie $|\underline{g}|$ für den Pol, den Äquator und Braunschweig bei $\theta = 52.2667°$.
Es ist $\gamma = 6.674 \cdot 10^{-11}\mathrm{m}^3/(\mathrm{kg\ s}^2)$, $M_{Erde} = 5.974 \cdot 10^{24}\mathrm{kg}$, $r_{\mathrm{Pol}} = 6357\mathrm{km}$ und $r_{\text{Äquator}} = 6378\mathrm{km}$.

(d) Wie schnell müsste sich die Erde drehen, damit man am Äquator schwerelos wäre? Bevor Sie rechnen, denken Sie an die ISS (International Space Station). Sie braucht für einen Umlauf (z.B. über dem Äquator) ca. 90 min.

4. **Präzises Zielen** **(10 Punkte)**

Lässt man einen Gegenstand von einem Turm fallen, so fällt dieser aufgrund der Erdrotation nicht exakt senkrecht nach unten, sondern wird durch die Corioliskraft nach Osten hin abgelenkt (Reibungskräfte seien vernachlässigt). Das System Σ' mit Ursprung auf der Erdoberfläche wird daher so gewählt, dass $\underline{e}_1'$ nach Süden, $\underline{e}_2'$ nach Osten und $\underline{e}_3'$ senkrecht zur Oberfläche von der Erde weg zeigt.

Bitte wenden ⟶

(a) Die Größe dieser Abweichung soll in erster Ordnung bzgl. der Erdrotationskreisfrequenz ω abgeschätzt werden, d.h. alle Terme, die ω^2 oder höhere Potenzen von ω enthalten, sollen vernachlässigt werden. Das ist sinnvoll, da sich die Erde langsam dreht und ω klein ist. Zudem soll ω als zeitlich konstant angenommen werden. Zeigen Sie, dass sich das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1' &= 2\omega \sin\theta \, \dot{x}_2' \\ \ddot{x}_2' &= -2\omega \left(\cos\theta \, \dot{x}_3' + \sin\theta \, \dot{x}_1'\right) \\ \ddot{x}_3' &= -g + 2\omega \cos\theta \, \dot{x}_2' \end{aligned}$$

ergibt, wobei θ den Breitengrad bezeichnet.

(b) Lösen Sie das System, indem Sie die erste und dritte Gleichung unmittelbar integrieren und dann in die mittlere einsetzen. Die Anfangsbedingungen sollen entsprechend eines Massenpunktes mit Anfangshöhe h und Anfangsgeschwindigkeit Null gewählt werden. Für x_2' erhalten Sie so die erwähnte Ostabweichung durch die Corioliskraft.

Hinweis: Die erzeugte Gleichung (mittlere Gleichung) ist eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, die nach dem in der Übung besprochenen Algorithmus gelöst werden kann. Wenn allerdings die obige Näherung, alle Terme proportional ω^2 zu vernachlässigen, konsequent angewendet wird, vereinfacht sich diese Gleichung und kann direkt zweimal integriert werden. Empfohlen wird letzteres Verfahren.

(c) Wie groß ist in Braunschweig die Ostabweichung durch die Corioliskraft bei einem Fall aus 50 m Höhe?