



3. Übungsblatt

Abgabe: 30. April 2015 bis 16 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: P. Meier, Raum A223, Tel.: 391-5189, patrick.meier@tu-bs.de

6. Ebene Polarkoordinaten als Beispiel krummliniger Koordinaten

In dieser Aufgabe soll das Rechnen mit krummlinigen Koordinaten am Beispiel ebener Polarkoordinaten wiederholt und geübt werden.

- Erklären Sie anschaulich, was man unter den kovarianten und kontravarianten Basen in Polarkoordinaten versteht.
- Formulieren Sie die Umrechnung der kovarianten Basen $\{\underline{b}_\rho, \underline{b}_\varphi\}$ und kontravarianten Basen $\{\underline{b}^\rho, \underline{b}^\varphi\}$ in ebenen Polarkoordinaten (ρ, φ) aus den kartesischen Koordinaten (x^1, x^2) .
- Berechnen Sie alle Elemente des metrischen Fundamentaltensors $g_{ab} = \underline{b}_a \cdot \underline{b}_b$ und das Linienelement $ds^2 = g_{ab} d\xi^a d\xi^b$ in Polarkoordinaten.
- Berechnen Sie die kovarianten und kontravarianten Komponenten des Gradienten eines Skalarfeldes $\partial_x f$. Füllen Sie die folgende Tabelle aus.

	kartesische Koordinaten	Polarkoordinaten
kovariante Komponenten $(\partial_x f)_a$	$\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2} \right)$	$(,)$
kontravariante Komponenten $(\partial_x f)^a$	$(,)$	$(,)$

7. Krummlinige, nicht-orthogonale Koordinaten

Als Beispiel für krummlinige und nicht-orthogonale Koordinaten ξ^1, ξ^2, ξ^3 betrachten wir (x^1, x^2, x^3) sind kartesische Koordinaten)

$$x^1 = a \xi^1 \cos(\xi^2) \quad ; \quad x^2 = b \xi^1 \sin(\xi^2) \quad ; \quad x^3 = c \xi^3 \quad (1)$$

mit $a, b, c \neq 0$.

- Stellen Sie die ko- und kontravariante Basis ($\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bzw. $\{\underline{b}^1, \underline{b}^2, \underline{b}^3\}$) sowie den metrischen Tensor auf. Wie lassen sich die einzelnen Einträge des metrischen Tensors interpretieren?
- Berechnen Sie $ds^2 = d\underline{x} \cdot d\underline{x}$ in den kartesischen Koordinaten x^a und den krummlinigen Koordinaten ξ^a .
- Skizzieren Sie die Koordinatenlinien in der (x^1, x^2) -Ebene für $a = 1, b = 2$ und zeichnen Sie die ko- und kontravarianten Basisvektoren in den Punkten $(\xi^1, \xi^2) = (1, \pi/4)$ bzw. $(\xi^1, \xi^2) = (1, \pi/2)$ ein. Welche Gleichungen beschreiben die Linien $\xi^1 = \text{const}$ bzw. $\xi^2 = \text{const}$ in kartesischen Koordinaten? Was ergibt sich für den metrischen Tensor und die Basisvektoren im Fall $a = b = c = 1$?