3. Übungsblatt

Fragen zu den Aufgaben: Uwe Motschmann, Raum A312, Tel.: 391-5186, u.motschmann@tu-bs.de

Stichworte: Koordinatentransformationen, Jacobi-Matrix, Tensoren

6. **Gestreckte spährische Koordinaten**

   Der Zusammenhang zwischen gestreckten sphährischen Koordinaten (χ, θ, φ) und gewöhnlichen kartesischen Koordinaten (x^1, x^2, x^3) im dreidimensionalen euklidischen Raum ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
x^1 &= \sinh\chi \sin\theta \cos\varphi \\
x^2 &= \sinh\chi \sin\theta \sin\varphi \\
x^3 &= \cosh\chi \cos\theta
\end{aligned}
$$

   (a) Berechnen Sie das Linienelement ds^2 für gestreckte spährische Koordinaten.

   (b) Im folgenden beschränken wir uns auf die $x^2 = 0$ Ebene, was $\varphi = 0$ entspricht. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $A^a{}_{b\prime} = \frac{\partial x^a}{\partial \xi^{b\prime}}$ für die Transformation von (x^1, x^3) nach (χ, θ) mit $\xi^{1\prime} = \chi$, $\xi^{2\prime} = \theta$. Berechnen Sie auch die inverse Matrix $A^{a\prime}_{\ b}$.

7. **Tensoren**

   Als einen Tensor n-ter Stufe bezeichnen wir eine physikalische oder geometrische Größe, deren Komponenten sich beim Übergang von einem Koordinatensystem KS zu dem System KS' folgendermaßen verhalten:

$$T^{i'j'k'\dots} = A^{i'}{}_{l}\, A^{j'}{}_{m} A^{k'}{}_{n} \cdots\, T^{lmn\dots} \quad , \tag{1}$$

   wobei $A^{i'}{}_{l}$ die Jacobi-Matrix der Koordinatentransformation darstellt,

$$A^{i'}{}_{l} = \frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi^{l}} \quad . \tag{2}$$

   Für die kovarianten oder gemischten Komponenten gelte natürlich das entsprechende Transformationsverhalten.

   Zeigen Sie:

   (a) Wenn T_{ij} symmetrisch ist, dann ist auch T^{ij} symmetrisch.

   (b) Wenn T^{ij} ein Tensor und $T^{ij}\, N_{ij}$ eine Invariante ist, dann ist N_{ij} ebenfalls ein Tensor. Dies bezeichnet man auch als den *Quotientensatz*.

   (c) $\underline{C}$ und $\underline{B}$ seien beliebige Tensoren 1. Stufe. Es gelte die Relation

$$C^k = D^{ki} B_i$$

   Dann sind D's ebenfalls Tensorkomponenten.

(d) Die Spur des Produktes aus einem symmetrischen und einem antisymmetrischen Tensor ist null.

8. **Metrischer Tensor**

Wir betrachten die Transformation von kartesischen Koordinaten zu Zylinderkoordinaten. Rechnen Sie explizit nach, dass sich der metrische Tensor g_{ab} wie ein Tensor 2. Stufe transformiert.