INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dr. M. Feyerabend

2. Übungsblatt Abgabe: 2.11.2017 bis 9:45 Uhr im Kasten vor 3.317

Fragen zu den Aufgaben: Moritz Feyerabend, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, m.feyerabend@tu-bs.de

3. **Kettenregel und partielle Ableitungen** **(6 Punkte)**

Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion $f(x, y, z)$ mit der Eigenschaft, dass in einem geeigneten Gebiet die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ nach einer jeden der drei Variablen x, y oder z eindeutig als stetig differenzierbare Funktion der beiden anderen Variablen aufgelöst werden kann. Dann gilt:

(a) $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = 1$;

(b) $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$;

(c) $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y$.

Verifizieren Sie diese Beziehungen zunächst anhand eines konkreten Beispiels:

$$f(x, y, z) = 2x + 3y + z = 0$$

Zeigen Sie deren Gültigkeit anschließend allgemein.

4. **Boltzmann-Verteilung** **(6 Punkte)**

Ein Kristall mit N Gitterplätzen hat n_A Fehlstellen mit der Aktivierungsenergie ϵ_A und n_B Fehlstellen mit ϵ_B.

(a) Bestimmen Sie den Entartungsfaktor $g(N, n_A, n_B)$ für die Anordnung der Fehlstellen.

(b) Bestimmen Sie das Maximum der Entropie σ bezüglich der Variablen n_A und n_B unter der Nebenbedingung, dass die Gesamtenergie U konstant ist. Wie ist das Verhältnis von n_A zu n_B in Abhängigkeit von der Temperatur τ? Führen Sie dazu die Temperatur in Analogie zur Vorlesung ein. Betrachten Sie die Fehlstellen A als ein Subsystem und die Fehlstellen B als das andere Subsystem, die beide in thermischen Kontakt stehen. Stellen Sie dieses Verhältnis als Funktion von $\tau, \epsilon_A, \epsilon_B$ dar.

(c) Berechnen Sie außerdem die Fehlstellendichten n_A/N und n_B/N.

Hinweis: Es soll gelten: $1 \ll n_A, n_B \ll N$. Verwenden Sie für die Fakultät die Näherung aus der Übung. Den Kristall kann man sich als Kette, zwei- oder dreidimensionales Gitter vorstellen, dass mit Molekülen AB besetzt ist. Die Fehlstellen können nun so interpretiert werden, dass sich an einigen Stellen A aus dem Kristall gelöst hat, an anderen B, jedoch niemals das ganze Molekül. Die dazu notwendigen Energien sind dann ϵ_A und ϵ_B.

Bitte wenden ⟶

5. **Paramagnetismus** **(8 Punkte)**

Betrachten Sie die Spinkette aus N Spins mit magnetischem Moment μ bei der Temperatur τ. Zeigen Sie, dass nach Anlegen eines äußeren Magnetfelds B die Spinkette ein magnetisches Gesamtmoment

$$M = N\mu \tanh\left(\frac{\mu B}{\tau}\right)$$

besitzt. Gehen Sie dabei von der aus der Vorlesung bekannten Entartungsfunktion

$$g(N,m) = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}+m\right)!\left(\frac{N}{2}-m\right)!}$$

aus. Skizzieren Sie den Verlauf von $M(\tau)$. Als Zwischenergebnis sollten Sie auch $\tau^{-1}(U)$ erhalten. Skizzieren Sie auch den Verlauf hiervon. Welche Besonderheit besitzt der Wertebereich dieser Temperatur?

Hinweise: Benutzen Sie für die Fakultät die Näherungsformel aus der Übung und ersetzen Sie m und M durch die Energie U.