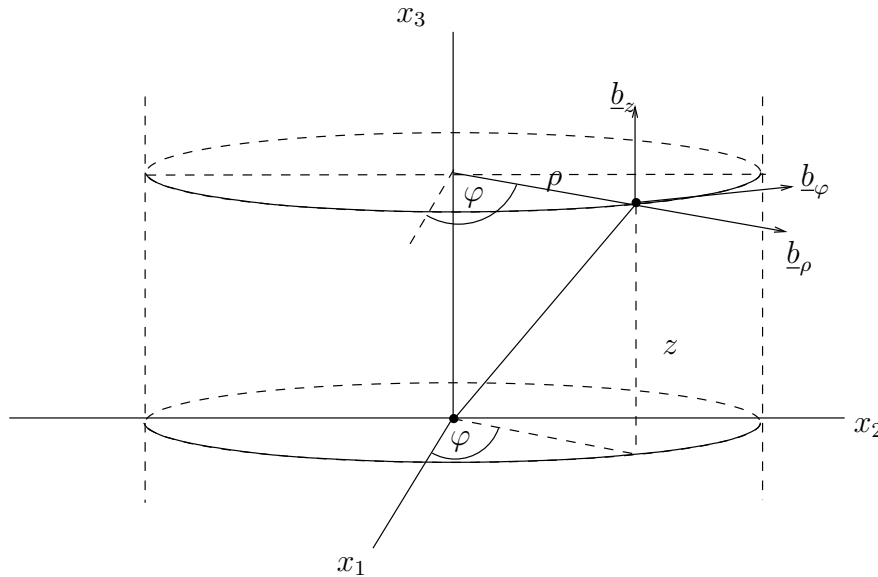


4. Zylinderkoordinaten

(10 Punkte)

In vielen Fällen ist es zweckmäßig an die Problemstellung angepasste Koordinaten zu verwenden, wie z.B. die Zylinderkoordinaten $\xi^1 = \rho$, $\xi^2 = \varphi$, $\xi^3 = z$.



Der Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten ist gegeben durch

$$x_1 = \rho \cos \varphi$$

$$x_2 = \rho \sin \varphi$$

$$x_3 = z \quad .$$

(a) Berechnen Sie die Basisvektoren

$$\underline{b}_a = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \xi^a} \quad ,$$

wobei $\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3$ der Ortsvektor sei, und normieren Sie diese. Die normierten Basisvektoren bezeichnen wir mit $\hat{\underline{b}}_a$, $a \in \{\rho, \varphi, z\}$.

(b) Stellen Sie $\underline{x}$ in der Basis $\{\hat{\underline{b}}_a\}$ dar und berechnen Sie die Geschwindigkeit $\underline{v} = \dot{\underline{x}}$.

Bitte wenden $\longrightarrow$

5. Das begleitende Dreibein

(10 Punkte)

Wir betrachten die Bahnkurve

$$\underline{x}(t) = 3 \sin\left(\frac{t}{t_0}\right) \underline{e}_1 + \frac{4t}{t_0} \underline{e}_2 + 3 \cos\left(\frac{t}{t_0}\right) \underline{e}_3 \quad .$$

Um den Verlauf der Kurve in einem Punkt beschreiben zu können, verwendet man das „begleitende Dreibein“ aus Tangenteneinheitsvektor $\underline{t} = \frac{\dot{\underline{x}}(t)}{|\dot{\underline{x}}(t)|}$, Hauptnormaleneinheitsvektor $\underline{n} = \frac{\dot{\underline{t}}(t)}{|\dot{\underline{t}}(t)|}$ und Binormaleneinheitsvektor $\underline{b} = \underline{t} \times \underline{n}$. Berechnen Sie

- (a) die Bogenlänge $s(t)$, wobei $s(t=0) = 0$ sein möge;
- (b) das begleitende Dreibein allgemein und für $t = 5\pi t_0$;
- (c) die Krümmung $\kappa = \left| \frac{d\underline{t}}{ds} \right|$;
- (d) die Torsion $\tau = -\frac{d\underline{b}}{ds} \cdot \underline{n}(s)$ der Raumkurve .