


4. Differentiationen der Umkehrfunktionen
7 Punkte

Vorbemerkung: Gegeben sei eine Funktion

$$y = f(x) \quad .$$

x sei die unabhängige Variable, y die abhängige. Für die graphische Darstellung ist es üblich die unabhängige Variable x als Abszisse nach rechts aufzutragen und die abhängige Variable y als Ordinate nach oben. Die Auflösung dieser Funktionen nach x führt auf die Umkehrfunktion f^{-1}

$$x = f^{-1}(y) \quad .$$

Der Graph dieser Umkehrfunktion ist identisch mit dem der Ausgangsfunktion, denn es wurde nur umgestellt und sonst nichts verändert. Allerdings wäre innerhalb der Umkehrfunktion die Variable y als unabhängig und x als abhängig anzusehen. Will man die Umkehrfunktion nun in der gleichen graphischen Darstellung unterbringen wie die Ausgangsfunktion, passt die Symbolik nicht zusammen, da y ursprünglich als abhängige Variable nach oben aufgetragen ist. Jetzt in der Umkehrfunktion ist y aber unabhängige Variable und sollte nach rechts aufgetragen werden. Entsprechendes gilt für x . Um die Umkehrfunktion dennoch im gleichen Graphen auftragen zu können ohne die üblichen Konventionen zu brechen, sind x und y gegeneinander auszutauschen. Man schreibt dann die Umkehrfunktion f^{-1} in der Form

$$y = f^{-1}(x) \quad .$$

Konkret zu betrachten sind nun die Umkehrfunktionen des Sinus, Cosinus und Tangens.

- (a) Die Umkehrfunktion von $y = f(x) = \sin x$ ($-\pi/2 < x < +\pi/2$) heißt Arcussinus (arcsin) und wir schreiben

$$y = f^{-1}(x) = \arcsin(x)$$

- i. Skizzieren Sie die Ausgangsfunktion f und die Umkehrfunktion f^{-1} .
- ii. Zeigen Sie unter Benutzung von $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$, dass gilt

$$\frac{d(\arcsin(x))}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- (b) Die Umkehrfunktion von $y = f(x) = \cos x$ ($-\pi/2 < x < +\pi/2$) heißt Arcuscosinus (arccos) und wir schreiben

$$y = f^{-1}(x) = \arccos(x)$$

- i. Skizzieren Sie die Ausgangsfunktion f und die Umkehrfunktion f^{-1} .
- ii. Zeigen Sie unter Benutzung von $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$, dass gilt

$$\frac{d(\arccos(x))}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- (c) Die Umkehrfunktion von $y = f(x) = \tan x$ ($-\pi/2 < x < +\pi/2$) heißt Arcustangens (arctan) und wir schreiben

$$y = f^{-1}(x) = \arctan(x)$$

Bitte wenden →

- i. Skizzieren Sie die Ausgangsfunktion f und die Umkehrfunktion f^{-1} .
- ii. Zeigen Sie unter Benutzung von $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$, dass gilt

$$\frac{d(\arctan(x))}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

5. Satellit auf Kreisbahn

5 Punkte

Die Gesamtenergie eines Satelliten mit Masse m , der sich auf einer Kreisbahn mit Radius ρ um ein Gravitationszentrum mit Masse M bewegt, lässt sich durch

$$U = \frac{L^2}{2m\rho^2} - \frac{mM\gamma}{\rho} \quad (1)$$

beschreiben. γ ist die Gravitationskonstante und $L = \text{const}$ bezeichnet den Betrag des Drehimpulses. Der Satellit bewegt sich allerdings nur auf dieser Kreisbahn, wenn die Gesamtenergie minimal ist.

- (a) Skizzieren Sie die Energie als Funktion des Radius.
- (b) Bestimmen Sie den Kreisbahnradius und die dazugehörige Gesamtenergie.
- (c) Betrachten Sie einen Satelliten auf einer Kreisbahn um die Erde. damit der Satellit nicht abstürzt, muss sein Bahnradius mindestens der Erdradius sein. Berechnen Sie die Gesamtenergie eines 1 Tonne schweren Satelliten für diese Grenzsituation. Benutzen Sie den auf ganze Kilometer gerundeten mittleren Erdradius, die Erdmasse und den Drehimpuls $5,03 \cdot 10^{13} \text{ kg m}^2/\text{s}$.

6. Bergpfad

8 Punkte

Das Höhenprofil eines Berges sei durch die Funktion

$$h(x, y) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-(x^2+y^2)} \quad (2)$$

gegeben. Die x -Achse möge auf der Erdoberfläche nach Osten und die y -Achse nach Norden zeigen. Die Erdoberfläche wird in der Umgebung des Berges als lokal eben angenommen.

- (a)
 - i. Bestimmen Sie die Position des Gipfels und der Talsohle.
 - ii. Wie groß ist der Höhenunterschied zwischen Gipfel und Talsohle?
- (b) Über den Berg führt ein Pfad, für dessen Projektion in die x - y -Ebene gilt

$$y = x + \frac{1}{4} \quad . \quad (3)$$

Wo befinden sich der höchste und tiefste Punkt des Pfades? Lösen Sie diese Extremwertaufgabe indem Sie den Pfad in das Höhenprofil einsetzen und reine x -Abhängigkeit erzeugen.