INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
P. Meier, M. Sc.

2. Übungsblatt

Fragen zu den Aufgaben: P. Meier, Raum A223, Tel.: 391-5189, patrick.meier@tu-bs.de

4. **Ebene Polarkoordinaten als Beispiel krummliniger Koordinaten**

In dieser Aufgabe soll das Rechnen mit krummlinigen Koordinaten am Beispiel ebener Polarkoordinaten wiederholt und geübt werden.

(a) Erklären Sie anschaulich, was man unter den kovarianten und kontravarianten Basen in Polarkoordinaten versteht.

(b) Formulieren Sie die Umrechnung der kovarianten Basen $\{\underline{b}_\rho, \underline{b}_\varphi\}$ und kontravarianten Basen $\{\underline{b}^\rho, \underline{b}^\varphi\}$ in ebenen Polarkoordinaten (ρ, φ) aus den kartesischen Koordinaten (x^1, x^2).

(c) Berechnen Sie alle Elemente des metrischen Fundamentaltensors $g_{ab} = \underline{b}_a \cdot \underline{b}_b$ und das Linienelement $ds^2 = g_{ab} d\xi^a d\xi^b$ in Polarkoordinaten.

(d) Berechnen Sie die kovarianten und kontravarianten Komponenten des Gradienten eines Skalarfeldes $\partial_{\underline{r}} f$. Füllen Sie die folgende Tabelle aus.

	kartesische Koordinaten	Polarkoordinaten
kovariante Komponenten $(\partial_{\underline{r}} f)_a$	$\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}\right)$	(,)
kontravariante Komponenten $(\partial_{\underline{r}} f)^a$	(,)	(,)

5. **Krummlinige, nicht-orthogonale Koordinaten**

Als Beispiel für krummlinige und nicht-orthogonale Koordinaten ξ^1, ξ^2, ξ^3 betrachten wir (x^1, x^2, x^3 sind kartesische Koordinaten)

$$x^1 = a\,\xi^1 \cos\left(\xi^2\right) \quad ; \quad x^2 = b\,\xi^1 \sin\left(\xi^2\right) \quad ; \quad x^3 = c\,\xi^3 \tag{1}$$

mit $a, b, c \neq 0$.

(a) Stellen Sie die ko- und kontravariante Basis ($\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ bzw. $\left\{\underline{b}^1, \underline{b}^2\right\}$) sowie den metrischen Tensor auf. Wie lassen sich die einzelnen Einträge des metrischen Tensors interpretieren?

(b) Berechen Sie $ds^2 = d\underline{r} \cdot d\underline{r}$ in den kartesischen Koordinaten x^a und den krummlinigen Koordinaten ξ^a.

Bitte wenden ⟶

(c) Skizzieren Sie die Koordinatenlinien in der $\left(x^1, x^2\right)$-Ebene für $a = 1, b = 2$ und zeichnen Sie die ko- und kontravarianten Basisvektoren in den Punkten $\left(\xi^1, \xi^2\right) = (1, \pi/4)$ bzw. $\left(\xi^1, \xi^2\right) = (1, \pi/2)$ ein. Welche Gleichungen beschreiben die Linien $\xi^1 = \text{const}$ bzw. $\xi^2 = \text{const}$ in kartesischen Koordinaten? Was ergibt sich für den metrischen Tensor und die Basisvektoren im Fall $a = b = c = 1$?

(d) Im Punkt $P = \left(\xi^1, \xi^2\right) = (1, \pi/4)$ haben zwei Vektorfelder $\underline{E}_I$, $\underline{E}_{II}$ bezüglich kartesischer Einheitsvektoren $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ die Darstellungen $\underline{E}_I = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2$ bzw. $\underline{E}_{II} = 2\underline{e}_2$. Stellen Sie diese Vektoren bezüglich der Basen $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ und $\left\{\underline{b}^1, \underline{b}^2\right\}$ dar. Berechnen Sie das Skalarprodukt $\underline{E}_1 \cdot \underline{E}_2$ in kartesischen Koordinaten und in den Koordinaten ξ^1, ξ^2.

6. **Tensoren**

Als einen Tensor n-ter Stufe bezeichnen wir eine physikalische oder geometrische Größe, die sich beim Übergang von einem Koordinatensystem KS zu dem System KS' folgendermaßen verhält:

$$T^{i'j'k'\dots} = A^{i'}_{\ l} \, A^{j'}_{\ m} A^{k'}_{\ n} \cdots \; T^{lmn\dots} \quad , \tag{2}$$

wobei $A^{i'}_{\ l}$ die Jacobi-Matrix der Koordinatentransformation darstellt,

$$A^{i'}_{\ l} = \frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi^l} \quad . \tag{3}$$

Für die kovarianten oder gemischten Komponenten gelte natürlich das entsprechende Transformationsverhalten.

Zeigen Sie:

(a) Wenn T_{ij} symmetrisch ist, dann ist auch T^{ij} symmetrisch.

(b) Wenn $T^{ij\cdots}$ ein Tensor und $T^{ij\cdots} \, N_{ij\dots}$ eine Invariante ist, dann ist $N_{ij\dots}$ ebenfalls ein Tensor. Dies bezeichnet man auch als den *Quotientensatz*.

(c) Die Spur des Produktes aus einem symmetrischen und einem antisymmetrischen Tensor ist null.