3. **Eine nützliche Abschätzung**

Außerordentlich hilfreich in der Statistischen Physik ist die Abschätzung

$$\ln(n!) \approx n \ln n - n \quad ; \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \gg 1 \qquad . \tag{1}$$

(a) Finden Sie für diese Näherung eine einfache Begründung.

(b) Zeigen Sie, dass sich Gleichung (1) auch aus der Stirlingschen Formel ergibt, die Sie aus der Vorlesung kennen.

(c) Ab welchem n ist die relative Abweichung in Gleichung (1) kleiner als 1%?

4. **Zur Motivation der statistischen Beschreibung**

Betrachtet wird die Bewegung eines klassischen Teilchens in einem verdünnten Gas. Die Bahn möge als Gerade zwischen zwei Stößen idealisiert werden, so dass man nur die Orte und Zeiten der Stöße speichern muss. Zur Bestimmung der mittleren Stosszeit benutze man die Zahlenwerte: Dichte $n = 10^{19} cm^{-3}$, Wirkungsquerschnitt $\sigma = 10^{-16} cm^2$, mittlere Geschwindigkeit $v = 10^5 cms^{-1}$. Zur Speicherung einer reellen Zahl in "double precision" benötigt man auf einem Computer 8 Byte.

(a) Man berechne den pro Sekunde benötigten Speicherplatz um die Bahn des Teilchens zu tabellieren.

(b) Über welche Zeitspanne kann die Bahn des Teilchens auf einer 100GB großen Festplatte gespeichert werden?

(c) Nun betrachte man alle Teilchen in einem 1 Liter großen Gefäß. Wie viele 100GB große Festplatten benötigt man jede Sekunde, um die Bahn aller Teilchen zu protokollieren? Angenommen, die Festplatten seien 1cm dick und man würde alle übereiander stapeln, wie hoch würde der Stapel werden? (Die Entfernung zum nächsten Sternensystem, Alpha Centauri, ist übrigens ca. $4.16 \cdot 10^{16}$m.)

5. **Extrema unter Nebenbedingungen: Lagrange-Multiplikatoren** **(optional)**

Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren dient der Bestimmung von Extrema unter gegebenen Nebenbedingungen und wird gelegentlich in der Thermodynamik benötigt. Anhand zweier einfacher Beispiele soll dieses Verfahren wiederholt werden:

(a) Ein Rechteck, das unter allen Rechtecken gleichen Umfangs maximale Fläche besitzt, hat auch bei gegebener Fläche minimalen Umfang. Zeigen Sie beides.

(b) Maximieren Sie das Volumen eines Quaders, der gerade in das Innere des durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

definierten Ellipsoids passt. Zeigen Sie, dass das Verhältnis des maximalen Volumens zum Volumen des Ellipsoids $2/(\sqrt{3}\pi)$ ist.