1. Übungsblatt keine Abgabe (Präsenzübung)

Fragen zu den Aufgaben: P. Meier, Raum A223, Tel.: 391-5189, patrick.meier@tu-bs.de

1. **Differentialoperatoren**

- Der Gradient eines skalaren Potentials $\Phi(\underline{r})$ ist als
$$\partial_{\underline{r}}\Phi(\underline{r}) = \underline{A}(\underline{r}) \tag{1}$$
definiert. Dabei zeigt $\underline{A}$ in Richtung der stärksten Änderung von Φ.
- Die Divergenz eines Vektorfeldes $\underline{B}(\underline{r})$ ist als
$$\partial_{\underline{r}} \cdot \underline{B}(\underline{r}) = f(\underline{r}) \tag{2}$$
definiert. Dabei stellt f die Quellstärke von $\underline{B}$ dar.
- Die Rotation eines Vektorfeldes $\underline{B}$ ist als
$$\partial_{\underline{r}} \times \underline{B}(\underline{r}) = \underline{C}(\underline{r}) \tag{3}$$
definiert. Dabei stellt $\underline{C}$ die Wirbelstärke von $\underline{B}$ dar.

(a) Es seien $\underline{r}$ und $\underline{r}'$ zwei unterschiedliche Ortsvektoren und r bzw. r' deren Beträge. Berechnen Sie

i. $\partial_{\underline{r}} r$
ii. $\partial_{\underline{r}} \cdot \underline{r}$
iii. $\partial_{\underline{r}}|\underline{r} - \underline{r}'|$
iv. $\partial_{\underline{r}'}|\underline{r} - \underline{r}'|$
v. $\partial_{\underline{r}'}\frac{1}{r'}$
vi. $\partial_{\underline{r}}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$
vii. $\partial_{\underline{r}'}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$
viii. $\partial_{\underline{r}}(\ln r)$.

(b) (optional):
Es sei $\underline{A}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x - 2y \\ 2x \\ -\frac{1}{2}(x^2+y^2) \end{pmatrix}$, $\Phi(x,y,z) = -4xy^2 - 3xz + 8yz^3$ und $\underline{B} = \partial_{\underline{r}}\Phi$.
Berechnen Sie $\partial_{\underline{r}} \cdot \underline{A}$, $\partial_{\underline{r}} \times \underline{A}$, $\partial_{\underline{r}} \times \underline{B}$ und $\partial_{\underline{r}} \cdot \left(\partial_{\underline{r}} \times \underline{A}\right)$.

2. **Linienintegral**

(a) Als Linienintegral bezeichnen wir das Integral über ein Vektorfeld $\underline{F}$ längs eines Weges $\underline{s}(t)$:
$$\int_{\underline{x}_0}^{\underline{x}_1} \underline{F} \cdot \mathrm{d}\underline{s} = \int_{t_0}^{t_1} \underline{F}(\underline{s}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\underline{s}(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \quad .$$
Bestimmen sie das Linienintegral von $\underline{A}$ von $\underline{x}_0 = (-1,0,0)$ nach $\underline{x}_1 = (1,0,0)$ für die Wege
$$\underline{s}_1(t) = \begin{pmatrix} 2t-1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , t \in [0,1] \quad \text{und} \quad \underline{s}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \quad , t \in [\pi, 0] \quad .$$

Bitte wenden ⟶

(b) Die Bogenlänge $s(t)$ einer Kurve $\underline{s}(t)$ ist gegeben durch

$$s(t) = \int_{\underline{x}_0}^{\underline{x}_1} |\mathrm{d}\underline{s}| = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{\mathrm{d}\underline{s}(t)}{\mathrm{d}t} \right| \mathrm{d}t \quad .$$

Berechnen Sie die Bogenlängen von $\underline{s}_1(t)$ und $\underline{s}_2(t)$.

3. **Differentialgleichungen (optional)**

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen

(a) $y'(x) = -xy(x) + Ux \quad , \quad U = const$

(b) $\dot{x}^2 + x = 0$

(c) $y'' - 3y' + y = 0$