Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. U. Motschmann
Dr. P. Meier
M. Feyerabend, M.Sc.

THEORETISCHE MECHANIK — SS 2016

1. Übungsblatt — Abgabe: bis 09.40 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: P. Meier, Raum A223, Tel.: 391-5189, patrick.meier@tu-bs.de

1. Differentialoperatoren

- Der Gradient eines skalaren Potentials $\Phi(\underline{x})$ ist als
$$\partial_{\underline{x}}\Phi(\underline{x}) = \underline{A}(\underline{x}) \tag{1}$$
definiert. Dabei zeigt $\underline{A}$ in Richtung der stärksten Änderung von Φ.
- Die Divergenz eines Vektorfeldes $\underline{B}(\underline{x})$ ist als
$$\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{B}(\underline{x}) = f(\underline{x}) \tag{2}$$
definiert. Dabei stellt f die Quellstärke von $\underline{B}$ dar.
- Die Rotation eines Vektorfeldes $\underline{B}$ ist als
$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{B}(\underline{x}) = \underline{C}(\underline{x}) \tag{3}$$
definiert. Dabei stellt $\underline{C}$ die Wirbelstärke von $\underline{B}$ dar.

(a) Es seien $\underline{x}$ und $\underline{x}'$ zwei unterschiedliche Ortsvektoren und r bzw. r' deren Beträge. Berechnen Sie

i. $\partial_{\underline{x}} r$
ii. $\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{x}$
iii. $\partial_{\underline{x}} |\underline{x} - \underline{x}'|$
iv. $\partial_{\underline{x}'} |\underline{x} - \underline{x}'|$
v. $\partial_{\underline{x}'} \frac{1}{r'}$
vi. $\partial_{\underline{x}} \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$
vii. $\partial_{\underline{x}'} \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$
viii. $\partial_{\underline{x}} (\ln r)$.

(b) (optional):
Es sei $\underline{A}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ 2x_1 \\ -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}$, $\Phi(x_1, x_2, x_3) = -4x_1x_2^2 - 3x_1x_3 + 8x_2x_3^3$ und $\underline{B} = \partial_{\underline{x}}\Phi$.
Berechnen Sie $\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{A}$, $\partial_{\underline{x}} \times \underline{A}$, $\partial_{\underline{x}} \times \underline{B}$ und $\partial_{\underline{x}} \cdot \left(\partial_{\underline{x}} \times \underline{A}\right)$.

2. Linienintegral

(a) Als Linienintegral bezeichnen wir das Integral über ein Vektorfeld $\underline{F}$ längs eines Weges $\underline{s}(t)$:
$$\int_{\underline{x}_0}^{\underline{x}_1} \underline{F} \cdot \mathrm{d}\underline{s} = \int_{t_0}^{t_1} \underline{F}(\underline{s}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\underline{s}(t)}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t \quad .$$
Bestimmen sie das Linienintegral von dem Vektorfeld $\underline{A}$ aus der vorherigen Aufgabe von $\underline{x}_0 = (-1, 0, 0)$ nach $\underline{x}_1 = (1, 0, 0)$ für die Wege
$$\underline{s}_1(t) = \begin{pmatrix} 2t - 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , t \in [0, 1] \quad \text{und} \quad \underline{s}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \quad , t \in [\pi, 0] \quad .$$

Bitte wenden ⟶

(b) Die Bogenlänge $s(t)$ einer Kurve $\underline{s}(t)$ ist gegeben durch

$$s(t) = \int_{\underline{x}_0}^{\underline{x}_1} |\mathrm{d}\underline{s}| = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{\mathrm{d}\underline{s}(t)}{\mathrm{d}t} \right| \mathrm{d}t \quad .$$

Berechnen Sie die Bogenlängen von $\underline{s}_1(t)$ und $\underline{s}_2(t)$.

3. **Differentialgleichungen (optional)**

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen

(a) $y'(x) = -xy(x) + Ux \quad , \quad U = const$

(b) $\dot{x}^2 + x = 0$

(c) $y'' - 3y' + y = 0$