Dr. R. Steinigeweg
Dipl.-Phys. B. Willenberg

Rechenmethoden I WS 2012/13

9b. Übungsblatt Abgabe: Freiwillig, 9./10. Januar 2012 in der Übung

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-braunschweig.de/theophys/edu/wise-1213/rm11213`.

1. **Nullstellen**
   Bestimmen Sie alle Nullstellen der folgenden Funktionen mit Hilfe der angegebenen Methode.
   (a) Polynomdivision und quadratische Ergänzung: $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$
   (b) Wissen über den Verlauf im Intervall $[0, 2\pi]$ und Peridiozität: $f(x) = \sin(x)$
   (c) Anwendung der Umkehrfunktion auf beiden Seiten der Gleichung $f(x) = 0$ für die Funktion $f(x) = \ln|x|$

2. **Differentiation in 1D**
   Differenzieren Sie die folgenden Funktionen mit Hilfe der angegebenen Methode.
   (a) Faktorregel und Summenregel: $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i\,, \quad a_i = \text{const}$
   (b) Produktregel: $f(x) = \exp(x) \cdot \ln(x)$
   (c) Kettenregel: $f(x) = \sinh(\cos(a \cdot x)^2)\,, a = \text{const}$
   (d) Regel für die Umkehrfunktion und „Pythagoras“: $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$

3. **Integration in 1D**
   Integrieren Sie die folgenden Funktionen mit Hilfe der angegebenen Methode.
   (a) Faktorregel und Summenregel: $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i\,, a_i = \text{const}$
   (b) Partielle Integration: $f(x) = x \cdot \cosh(x)$
   (c) Substitution I (einen x-Ausdruck durch y ersetzen): $f(x) = x \cdot \exp(-x^2)$
   (d) Substitution II (x durch einen y-Ausdruck ersetzen) und „Pythagoras“: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
   (e) Partialbruchzerlegung I (Polstellen vom Grad 1): $f(x) = \frac{1}{(x+1)\cdot(x-2)}$
   (f) Partialbruchzerlegung II (Polstellen vom Grad > 1): $f(x) = \frac{1}{x^2 \cdot (x+3)}$

Bitte wenden! →

4. **Taylor-Entwicklung**
   Approximeren Sie die folgenden Funktionen für kleine Werte von x. Ihre Approximation sollte über eine einfache Konstante hinaus gehen.

$$f(x) = 1 - \exp(-x^2)\,, \quad g(x) = \sin^2(x)\,, \quad h(x) = 2[1 - \cos(x)]\,.$$

5. **Partielle Differentiation einer vektorwertigen Funktion**
   Berechnen Sie die folgende Richtungsableitung. *Sofern* es erforderlich ist, verwenden Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabe 2.

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \exp(y)\cdot\ln(z) \\ z + y\cdot x + z^2\cdot x^2 \\ \sinh(\cos(y\cdot x)^2) \end{pmatrix}$$

6. **Mehrfachintegration einer vektorwertigen Funktion**
   Berechnen Sie das folgende Mehrfachintegral. Verwenden Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabe 3.

$$\int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y \int \mathrm{d}z \begin{pmatrix} x\cdot y^2\cdot z^3 \\ y\cdot\cosh(y) \\ z\cdot\exp(-z^2) \end{pmatrix}$$

7. **Elementares Rechnen mit Vektoren**
   Geben Sie für die Standard-Basis in 3D an
   (a) die Multiplikation mit einem Skalar: $a\cdot\vec{e}_i$,
   (b) die Addition von zwei Vektoren: $\vec{e}_i + \vec{e}_j$,
   (c) das Skalarprodukt von zwei Vektoren: $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_i$ und $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j$,
   (d) das Vektorprodukt von zwei Vektoren: $\vec{e}_i\times\vec{e}_i$ und $\vec{e}_i\times\vec{e}_j$,
   (e) das Spatprodukt von drei Vektoren: $|(\vec{e}_i\times\vec{e}_i)\cdot\vec{e}_j|$, $|(\vec{e}_i\times\vec{e}_j)\cdot\vec{e}_i|$ und $|(\vec{e}_i\times\vec{e}_j)\cdot\vec{e}_k|$,
   (f) die orthogonale Projektion: $\vec{x}\cdot\vec{e}_i$.