



Übungsblätter gibt es unter <https://www.tu-braunschweig.de/theophys/edu/wise-1213/rm11213>.

32. Basiswechsel und unitäre Matrizen

In der 2D Standard-Basis sind zwei Vektoren gegeben durch

$$\vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{e}_1 + i\vec{e}_2), \quad \vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1\vec{e}_1 - 2i\vec{e}_2)$$

und eine 2×2 Matrix

$$U = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ i & -2i \end{pmatrix}$$

mit diesen Vektoren als Spalten.

- Zeigen Sie, dass die Vektoren eine Orthonormalbasis sind, d.h. $\vec{x}_i \cdot \vec{x}_j = \delta_{ij}$ (orthogonal und auf Länge 1 normiert). Benutzen Sie das Skalarprodukt für komplexe Zahlen!
- Zeigen Sie, dass die Matrix unitär ist, d.h. $U^\dagger U = 1$.
- Drücken Sie $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ als Linearkombination von $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ aus.
- Vergleichen Sie die Koeffizienten in der Linearkombination mit den Vektoren

$$(\vec{e}_1)' = U^\dagger \vec{e}_1, \quad (\vec{e}_2)' = U^\dagger \vec{e}_2.$$

- Bestimmen Sie die Vektoren

$$(\vec{x}_1)' = U^\dagger \vec{x}_1, \quad (\vec{x}_2)' = U^\dagger \vec{x}_2.$$

Welche Rolle spielt die Matrix $U^\dagger$ aufgrund von (c)-(e)?

- Vergleichen Sie die Skalarprodukte $(\vec{e}_i)' \cdot (\vec{e}_j)'$ und $(\vec{x}_i)' \cdot (\vec{x}_j)'$ mit den Skalarprodukten $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ und $\vec{x}_i \cdot \vec{x}_j$.
- Denken Sie sich eine 2×2 Matrix A aus, die selbst-adjungiert ist, d.h. $A^\dagger = A$. Zeigen Sie, dass die Matrix $A' = U^\dagger A U$ selbstadjungiert ist.

33. Eigenbasis

Gegeben ist eine 2×2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

- Bestimmen Sie die inverse Matrix A^{-1} .
- Bestimmen Sie die zwei Eigenwerte $\alpha_1 = 3/2$, $\alpha_2 = -1$ von A und die entsprechenden Eigenvektoren $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$. Normieren Sie die Länge zunächst auf 1. Dann schreiben Sie $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ in die Spalten einer 2×2 Matrix U .
Hinweis: A ist gerade so gewählt, dass U in Aufgabe 32 herauskommt. Jede Spalte Ihres U darf jedoch um einen Faktor -1 , i oder $-i$ abweichen.
- Berechnen Sie $A' = U^\dagger A U$ und $(A^{-1})' = U^\dagger A^{-1} U$. Vergleichen Sie nun die diagonalen Elemente von A' und $(A^{-1})'$ mit den Eigenwerten α_1 , α_2 .
- Bonusaufgabe:* Warum sind α_1 , α_2 reell?