INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. W. Brenig
M.Sc. Boris Celan
M.Sc. Niklas Casper

Physikalische Rechenmethoden I — WiSe 2016/17

9. Übungsblatt — Abgabe: Do, 12.01.2016 bis 11.30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1617/rm1617`.

27. **Eigenschaften von Determinanten (7 Punkte)**

(a) Seien $j, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $j \leq n$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ und $A, B \in \mathbb{M}(n, n, \mathbb{R})$. Gehen Sie von der aus der Vorlesung bekannten Definition der Determinante bzw. dem Laplaceschn Entwicklungssatz aus und zeigen Sie folgende Aussagen:

i. $\det A = \det A^T$

ii. Wenn die Zeilenvektoren linear abhängig sind, ist $\det A = 0$.

iii. Wenn A zwei gleiche Zeilen hat, ist $\det A = 0$.

iv.
$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

v.
$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{j1} & \dots & \lambda a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

vi. Wenn A und B durch vertauschen zweier Zeilen auseinander hervor gehen, ist

$$\det A = -\det B$$

vii.
$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{j,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} + \lambda a_{i1} & \dots & a_{jn} + \lambda a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

viii. $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ alle Zeilen von A sind linear unabhängig $\Leftrightarrow \exists A^{-1}$

Bitte wenden! →

(b) Beweisen Sie für $A, B \in \mathbb{M}(n, n, \mathbb{R})$ den Determinanten Multiplikationssatz

$$\det(A \circ B) = \det A \cdot \det B.$$

Hinweis: Konstruieren Sie eine Zerlegung von A in ein Produkt von Matrizen $S_i(\lambda)$, die die i-te Zeile mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ multipliziert und Matrizen Q_{ij}, die die j-te Zeile auf die i-te Zeile addiert. Zeigen Sie nun, dass der Multiplikationssatz für B und diese Matrizen gilt.

28. **Matrizen (5 Punkte)**

(a) Invertieren Sie die Matrix:
$$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -5 \\ -9 & -6 & 5 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

29. **Funktionen von Matrizen (5 Punkte)**
Sei $\vec{e}$ ein beliebiger reeller, dreidimensionaler Einheitsvektor und $\theta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass gilt

$$e^{i\theta(\vec{e}\cdot\vec{\sigma})} = \cos(\theta)\mathbb{1} + i\sin(\theta)(\vec{e}\cdot\vec{\sigma}),$$

wobei $\mathbb{1}$ die Einheitsmatrix, $\vec{e}\cdot\vec{\sigma} = \sum_{i=1}^{3} e_i\sigma_i$ und σ_i die Pauli-Matrizen.

30. **Zusatzaufgabe (optional bearbeitbar): Gauß-Jordan-Verfahren und Invertieren von Matrizen (15 Bonuspunkte)**
Gegeben sei die Matrix A beliebiger Größe N mit den Elementen:

$$a_{ij} = \begin{cases} i, & i = j \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie per Hand die Inverse der Matrix A für $N = 2, 3, 4$.

(b) Schreiben Sie ein Programm, das eine Matrix beliebiger Größe mit Hilfe des Gauss-Jordan-Verfahrens invertiert. Testen Sie Ihr Programm mit der Matrix A für $N = 2, 3, 4$ und vergleichen Sie mit a). Nutzen Sie zur Implementierung eine der folgenden Programmiersprachen: C++, Java, Mathematica oder Python. Greifen Sie dabei nicht auf die mitgelieferten Bibliotheken der Programmiersprache zur Invertierung von Matrizen zurück.

Hinweis: Beim Gauss-Jordan-Verfahren müssen Sie, um die Einträge unter der Diagonale zu löschen, immer mit dem derzeitigen Diagonaleintrag multiplizieren. Hier müssen Sie sicherstellen, dass sich in diesem Eintrag nicht aus versehen eine 0 befindet. Man kann dieses Problem lösen indem man die Zeilen so tauscht, dass immer der betragsmäßig größte Eintrag oben steht. Diesen Vorgang nennt man Pivoting. Mit diesem wird das Verfahren erst stabil.

Bitte wenden! →

i. Das Programm sollte nach Eingabe der Dimension N die Inverse A^{-1} in eine Textdatei ausgeben.

ii. Messen Sie die benötigte Zeit Ihrer Invertierung in Abhängigkeit der Dimension N der Matrix A. Plotten Sie diese Abhängigkeit. Die besten Programme werden im Anschluss in der Vorlesung ausgezeichnet.

iii. Das lauffähige Programm sollte mit einer kurzen Bedienungsanleitung an n.casper@tu-bs.de geschickt werden, um eine Überprüfung des Programms und eine Vergleichbarkeit der Laufzeiten zu ermöglichen.