INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. Björn Willenberg
M.Sc. Boris Celan

Rechenmethoden II SoSe 2013

9. Übungsblatt Abgabe: Di, 18.06.2013 bis 11.30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-braunschweig.de/theophys/edu/sose13/rm213`.

26. **Laurentreihe**
Entwickeln Sie die nachfolgende Funktion in allen Konvergenzgebieten in Laurentreihen um z_0. Geben Sie die dazugehörigen Konvergenzradien an. Benennen Sie alle auftretenden Singularitäten und geben Sie Residuen an, falls vorhanden.

$$f(z) = \frac{z^2 - 4z + 2}{z(z-1)(z-2)}; \; z_0 = 0$$

27. **Residuensatz**

(a) Berechnen Sie mithilfe des Residuensatzes das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} \, \mathrm{d}x; \; t \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

Führen Sie dabei das reelle Integral in ein geschlossenes Kurvenintegral über die obere bzw. untere komplexe Halbebene (vgl. Aufgabe 25 (b)) über. Die Wahl der Halbebene hängt vom Vorzeichen von t ab, machen Sie eine Fallunterscheidung.

(b) Zeigen Sie mithilfe des Residuensatzes, dass

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5 - 4\cos\theta} \, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{12}.$$

Überführen Sie dabei das reelle Integral über θ in ein Integral über den Einheitskreis in der komplexen Ebene. Dazu bietet sich die Substitution $z = e^{i\theta}$ an.

(c) Der Residuensatz lässt sich benutzen, um unendliche Summen zu berechnen. Zeigen Sie mithilfe des Residuensatzes, dass für $a > 0, a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth(\pi a).$$

Betrachten Sie dazu das Integral

$$\oint_C \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2 + a^2} \, \mathrm{d}z,$$

wobei C der Rand der kompletten komplexen Ebene ist. Zeigen Sie zunächst, dass das Integral über C verschwindet. Dazu bietet sich eine Parametrisierung von C, z.B. mit einem Kreis mit Radius $R \to \infty$, an. Bestimmen Sie anschließend mithilfe des Residuensatzes die Residuen.
Hinweis: $\cot(ix) = \frac{\cos(ix)}{\sin(ix)} = \frac{\cosh x}{i \sinh x} = -i \coth x$