Technische Universität Braunschweig

Dr. R. Steinigeweg
Dipl.-Phys. B. Willenberg

8. Übungsblatt — Abgabe: 19./20. Dezember 2012 in der Übung

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-braunschweig.de/theophys/edu/wise-1213/rm11213`.

28. **Additionstheoreme**
Zeigen Sie die Gültigkeit der drei Additionstheoreme

$$\sin(x-y) = \sin x\, \cos y - \sin y\, \cos x\,,$$

$$\cos(x+y) = \cos x\, \cos y - \sin x\, \sin y\,, \quad \cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

mit Hilfe der Euler-Darstellung einer komplexen Zahl.
Hinweis: Arbeiten Sie sich am besten von der rechten zur linken Seite der jeweiligen Gleichung vor.

29. **Masse der Erdatmosphäre**
Die Luftdichte $\rho(h)$ in einer Höhe h über der Erdoberfläche beträgt nach der barometrischen Höhenformel

$$\rho(h) = \rho_0\, e^{-\rho_0 g h / p_0}\,, \tag{1}$$

wobei $\rho_0 = \rho(0)$ die Luftdichte und $p_0 = p(0)$ der Normaldruck an der Erdoberfläche sind, während g die Erdbeschleunigung bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie die Masse M der Erdatmosphäre unter Verwendung von (1) und dem Volumenintegral

$$M = \int_V \mathrm{d}V\, \rho(h)\,.$$

Hinweis: Drücken Sie zunächst die Luftdichte $\rho(h)$ in Kugelkoordinaten aus, indem Sie für die Höhe $h = r - R$ einsetzen, wobei R den Erdradius darstellt. Anschließend führen Sie die unter anderem auftretende r-Integration von R bis ∞ aus.

(b) Setzen Sie in Ihr Ergebnis die Zahlenwerte $\rho_0 = 1{,}29\,\mathrm{kg/m^3}$, $p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5\,\mathrm{N/m^2}$, $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ und $R = 6{,}36 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$ ein. Vergleichen Sie die resultierende Masse der Erdatmosphäre mit der Masse der Erde von ungefähr $6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$.

30. **Trägheitsmomente**
Das Trägheitsmoment eines starren Körpers mit homogener Massenverteilung ist gegeben durch

$$I = \rho \int_V \mathrm{d}V\, (r_\perp)^2\,,$$

wobei ρ die konstante Dichte ist und $r_\perp$ den Abstand eines Punktes zur Rotationsachse bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie das Trägheitsmoment für einen Vollzylinder, der um seine Längsachse rotiert (d.h. x_3-Achse in Ihrer Vorlesungsmitschrift). Drücken Sie Ihr Ergebnis nur durch die Masse und den Radius des Zylinders aus.
Hinweis: Schreiben Sie zunächst den senkrechten Abstand $r_\perp$ in Zylinderkoordinaten, indem Sie einfach $r_\perp = r$ setzen. Dann integrieren Sie über das Zylindervolumen.

Bitte wenden! →

(b) Bestimmen Sie das Trägheitmoment für eine Vollkugel, die um eine Achse durch den Mittelpunkt rotiert (z.B. x_3-Achse in Ihrer Vorlesungsmitschrift). Drücken Sie wieder Ihr Ergebnis nur durch Masse und Radius der Kugel aus.
Hinweis: Schreiben Sie nun den senkrechten Abstand $r_\perp$ in Kugelkoordinaten. Hier ist $r_\perp \neq r$. Während der Rechnung stoßen Sie auf ein Integral über $(\sin\vartheta)^3$, welches mit Hilfe von partieller Integration ausgeführt werden kann.

31. **Diffusionsgleichung**
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(t)} e^{-x^2/[2\sigma(t)^2]}\,, \quad \sigma(t) = \sqrt{2Dt}$$

die so genannte Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t)$$

erfüllt.