INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. W. Brenig
M.Sc. Boris Celan
M.Sc. Niklas Casper

Physikalische Rechenmethoden I — WiSe 2016/17

8. Übungsblatt — Abgabe: Do, 15.12.2016 bis 11.30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1617/rm1617`.

23. **Matrixmultiplikation (5 Punkte)**
Gegeben seien $A, C \in \mathbb{M}(3 \times 3, \mathbb{R})$, $B \in \mathbb{M}(2 \times 3, \mathbb{R})$, $x \in \mathbb{M}(3 \times 1, \mathbb{R})$ und $y \in \mathbb{M}(1 \times 3, \mathbb{R})$ durch:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:

(a) $B \cdot A$ (d) $A \cdot C - C \cdot A$

(b) $\alpha A + \beta C, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (e) $x \cdot y$

(c) $A \cdot C \cdot x$ (f) $y \cdot x$

24. **Gauß-Jordan-Elimination (5 Punkte)**
Bringen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 48 \\ 1x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 43 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 53 \end{aligned}$$

in Matrizenform und lösen Sie es mit dem aus der Vorlesung bekannten Gauß-Jordan-Verfahren.

25. **Drehmatrizen (5 Punkte)**
Drehungen in der Ebene lassen sich durch eine Matrix der Form

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

beschreiben.

(a) Überzeugen Sie sich anhand eines Beispieles davon, dass es sich um Drehungen handelt. Wenden Sie dazu M_φ für mehrere $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ auf den Vektor $\vec{x} = (0, 1)^T \in \mathbb{R}^2$ an und skizzieren Sie das Ergebnis.

Bitte wenden! →

(b) Zeigen Sie, dass die Menge aller Drehungen M_φ, wobei $\varphi \in [0, 2\pi)$, zusammen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe bilden. Prüfen Sie dazu die Gruppenaxiome (i-iv) nach:

i. Abgeschlossenheit:

$$\forall\ \varphi, \vartheta : \quad M_\varphi \cdot M_\vartheta = M_{\varphi+\vartheta}$$

ii. Assoziativität:

$$\forall\ \varphi, \vartheta, \psi : \quad M_\varphi \cdot (M_\vartheta \cdot M_\psi) = (M_\varphi \cdot M_\vartheta) \cdot M_\psi$$

iii. Neutrales Element:

$$\forall\ \varphi\ \exists\ \vartheta_0 : \quad M_\varphi \cdot M_{\vartheta_0} = M_\varphi$$

iv. Inverses Element:

$$\forall\ \varphi : \quad M_\varphi \cdot M_{-\varphi} = \mathbb{1}$$

Eine Gruppe ist abelsch, wenn gilt:

v. Kommutativität:

$$\forall\ \varphi, \vartheta : \quad M_\varphi \cdot M_\vartheta = M_\vartheta \cdot M_\varphi$$

Ist die Gruppe abelsch? Begründen Sie.

26. **Pauli-Matrizen (5 Punkte)**
In der Quantenmechanik sind zur Beschreibung des Spins eines Elektrons die sogenannten Pauli-Matrizen von Interesse:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ zusammen mit der Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ eine Basis des Vektorraumes der 2x2-Matrizen bilden.

(b) Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ. Für die Paulimatrizen lässt sich jedoch eine Beziehung angeben. Zeigen Sie, dass gilt:

$$[\sigma_l, \sigma_m] = \sigma_l \sigma_m - \sigma_m \sigma_l = 2i\epsilon_{lmn}\sigma_n$$