Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. W. Brenig
M.Sc. Boris Celan

Quantentheorie WS 2014/15

8. Übungsblatt Abgabe: Di, 16.12.2014 bis 11.30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1415/quanten`.

Man kann auf diesem Zettel 24 Punkte erreichen, wobei 4 davon Bonuspunkte sind!

20. **Kommutatorrelationen des Drehimpulsoperators (4 Punkte)**
Der Drehimpuls $\vec{L}$ ist gegeben durch

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}\,.$$

Zeigen Sie, dass für den Drehimpulsoperator $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3)$ folgende Kommutatorrelationen gelten (Summenkonvention beachten!)

(a)
$$[L_j, r_k] = i\hbar\varepsilon_{jkl}\, r_l\,, \qquad [L_j, p_k] = i\hbar\varepsilon_{jkl} p_l\,,$$

(b)
$$[L_j, \vec{r}^{\,2}] = 0\,, \qquad [L_j, \vec{p}^{\,2}] = 0\,,$$

(c)
$$[L_j, L_k] = i\hbar\varepsilon_{jkl} L_l\,.$$

Hinweis: Die Identität $\varepsilon_{rst}\,\varepsilon_{uvt} = \delta_{ru}\,\delta_{sv} - \delta_{rv}\,\delta_{su}$ dürfte bei der Rechnung hilfreich sein.

21. **Drehimpuls in Kugelkoordinaten (9 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass in Kugelkoordinaten $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$ für den Drehimpuls gilt

$$\begin{aligned}
L_x &= i\hbar\left(\sin\phi\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\\
L_y &= i\hbar\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\phi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\\
L_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\\
\vec{L}^{\,2} &= -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right).
\end{aligned}$$

(b) Wir betrachten nun

$$Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{i\phi/2}\sqrt{\sin\theta}\,.$$

Zeigen Sie

$$L_z Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\theta,\phi) = \frac{\hbar}{2}Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\theta,\phi), \qquad \vec{L}^{\,2} Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\theta,\phi) = \frac{3\hbar^2}{4}Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\theta,\phi).$$

Bitte wenden! →

22. **Kugelflächenfunktionen und Legendre-Polynome(6 Punkte)**
Eine Form der Kugelflächenfunktionen ist gegeben durch

$$Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos\theta) e^{im\phi},$$

wobei die zugeordenten Legendre-Polynome $P_\ell^m(z)$ wie folgt definiert werden

$$P_\ell^m(z) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!}(1-z^2)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^{\ell+m}}{\mathrm{d}z^{\ell+m}}(z^2-1)^\ell .$$

(a) Begründen Sie, dass

$$P_\ell^{-m}(z) = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m(z)$$

(b) Zeigen Sie

$$Y_{\ell,m}^*(\theta,\phi) = (-1)^m Y_{\ell,-m}(\theta,\phi)$$

(c) Zeigen Sie, dass die Kugelflächenfunktionen sich unter Spiegelungen am Ursprung $(r,\theta,\phi) \to (r,\pi-\theta,\phi+\pi)$ wie folgt verhalten

$$Y_{\ell,m}(\pi-\theta,\phi+\pi) = (-1)^\ell Y_{\ell,m}(\theta,\phi) .$$

23. **"Drehimpuls" zweier Spin-1/2-Teilchen (5 Punkte)**
Gegeben sind die Matrizen

$$J_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & -i & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & i & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die J_r die Drehimpuls-Vertauschungs-Relationen aus Aufgabe (20) erfüllen (mit $\hbar = 1$), d.h. (Summenkonvention beachten!)

$$[J_r, J_s] = i\varepsilon_{rst} J_t .$$

(b) Berechnen Sie $\vec{J}^2$ und geben Sie eine simultane Basis von Eigenvektoren von $\vec{J}^2$ und J_3 an.

(c) Wie lauten die zugehörigen Eigenwerte von $\vec{J}^2$ und J_3? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis unter Berücksichtigung der Tatsache, dass der Drehimpuls j einem Eigenwert $j(j+1)$ von $\vec{J}^2$ entspricht und die zugehörige Dimension der Darstellung $D = (2j+1)$ ist.