INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. Björn Willenberg
M.Sc. Boris Celan

Rechenmethoden II | SoSe 2013

8. Übungsblatt | Abgabe: Di, 11.06.2013 bis 11.30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-braunschweig.de/theophys/edu/sose13/rm213`.

24. **Potenzreihenentwicklung holomorpher Funktionen**

   (a) Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in einer Taylorreihe um z_0 und bestimmen Sie den Konvergenzbereich.

   i. e^{-z}; $z_0 = 0$
   ii. $\frac{1}{1+z}$; $z_0 = 1$
   iii. $z^3 - 3z^2 + 4z - 2$; $z_0 = 2$

   (b) Wenn die folgenden Funktionen um z_0 in eine Taylorreihe entwickelt werden würden, welches wären die Konvergenzradien? (Entwicklung soll nicht ausgeführt werden!)

   i. $f(z) = \frac{\sin z}{z^2+4}$; $z_0 = 0$
   ii. $f(z) = \frac{z+4}{(z-1)(z-4)}$; $z_0 = 2$
   iii. $f(z) = \frac{e^z}{z(z-1)}$; $z_0 = 4i$
   iv. $f(z) = \frac{e^z+1}{z+i\pi}$; $z_0 = 0$
   v. $f(z) = \frac{z^3+4z^2+3z}{z+1}$; $z_0 = 0$
   vi. $f(z) = \frac{z}{e^z+1}$; $z_0 = 0$

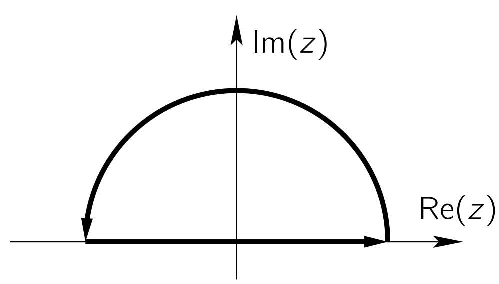
   (c) Bestimmen Sie die Singularitäten der Funktionen aus Aufgabenteil (b). Wo und welche Singularitäten (hebbar, wesentlich oder Pol n-ter Ordnung) liegen vor?

25. **Cauchy'sche Integralformel**

   (a) Bestimmen Sie für die Funktionen aus Aufgabe 24 (b) i.–v. mit Hilfe des Cauchy'schen Integralsatzes bzw. der Cauchy'schen Integralformel das Integral

$$\oint_{|z-z_1|=1/2} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

   wobei z_1 die Polstelle 1. Ordnung bzw. die hebbare Singularität ist.



   (b) Man kann die Cauchy'sche Integralformel verwenden, um bestimmte Integrale zu berechnen. Als Beispiel soll dieses Verfahren auf

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

   angewendet werden. Berechnen Sie dazu das entsprechende Integral im Komplexen mittels der Cauchy'schen Integralformel längs des skizzierten Weges für Kreisradius $R \to \infty$. Zeigen Sie, dass der Beitrag des Halbkreises in diesem Grenzfall verschwindet und Sie somit obiges Integral bestimmt haben.