Dr. R. Steinigeweg
Dipl.-Phys. B. Willenberg

7. Übungsblatt — Abgabe: 12./13. Dezember 2012 in der Übung

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-braunschweig.de/theophys/edu/wise-1213/rm11213`.

23. **Vektoren in 2D**
Gegeben seien die zweidimensionalen Vektoren

$$\vec{a} = 3\,\vec{e}_1 - 4\,\vec{e}_2, \quad \vec{b} = -\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 \quad \text{und} \quad \vec{c} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

(a) Bestimmen Sie $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} + 2\,\vec{b} + 3\,\vec{c}$ und $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$.

(b) Berechnen Sie die Länge der Vektoren.

(c) Berechnen Sie die Skalarprodukte $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{c} \cdot \vec{b}$ und $\vec{a} \cdot \vec{c}$.

(d) Welchen Winkel schließen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein?

(e) Argumentieren Sie, dass $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig sind. Finden Sie λ und μ in der Zerlegung $\vec{c} = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b}$.

24. **Vektoren in 3D**

(a) Sei $\vec{x} = 3\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ und $\vec{y} = 2\,\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\,\vec{e}_3$. Schreiben Sie $\vec{y}$ als Summe eines Vektors parallel zu $\vec{x}$ und eines Vektors senkrecht zu $\vec{x}$.

(b) Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ seien alle senkrecht zueinanders und vom $\vec{0}$-Vektor verschieden. Der Vektor $\vec{d}$ sei durch

$$\vec{d} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c}$$

gegeben. Drücken Sie α, β und γ durch Skalarprodukte aus.

25. **Levi-Civita-Symbol**

(a) Das Levi-Civita-Symbol ist definiert durch

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{falls } i,j,k \text{ gerade Permutation von } 1,2,3, \\ -1, & \text{falls } i,j,k \text{ ungerade Permutation von } 1,2,3, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

$$\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\,\delta_{jm} - \delta_{im}\,\delta_{jl}, \qquad \text{mit } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{falls } i \neq j. \end{cases} \tag{1}$$

Berechnen Sie: $\sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ljk}$ und $\sum_{ijk} \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijk}$

(b) Zeigen Sie, dass für Vektoren im $\mathbb{R}^3$ folgende Identitäten gelten:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}),$$
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}).$$

Hinweis: Sie können in (b) die Identitäten entweder direkt ausrechnen oder die Beziehung (1) benutzen. Vgl. Definition des Vektorprodukts mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols.

Bitte wenden! →

26. **Partielle Ableitung**
Gegeben sei eine vektorwertige Funktion (Vektorfeld)

$$\vec{f}(x,y,z) = (\sin(x) + yz^2) \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}$, $\frac{\partial \vec{f}}{\partial y}$ und $\frac{\partial \vec{f}}{\partial z}$.

27. **Mehrfachintegral**

(a) In kartesischen Koordinaten lässt sich die Fläche eines Kreises mit Radius R schreiben als

$$A_{\text{Kreis}}(R) = \int_{-R}^{R} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{d}y.$$

Berechnen Sie die Kreisfläche durch Ausführen dieses Integrals.

(b) *Bonusaufgabe:* Machen Sie eine analoge Rechnung für das Volumen einer Kugel mit Mittelpunkt im Ursprung mit Radius R.