INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. W. Brenig
M.Sc. Boris Celan
M.Sc. Niklas Casper

Physikalische Rechenmethoden I — WiSe 2016/17

7. Übungsblatt — Abgabe: Do, 08.12.2016 bis 11.30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1617/rm1617`.

20. **Skalarprodukt (5 Punkte)**
Sei $\mathcal{B}_1 \equiv \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ eine Basis des Vektorraumes $V \subset \mathbb{R}^n$ für die $\langle \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle \neq 0$ ist, wobei $\langle \cdot | \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt ist. Die Koordinatendarstellung für einen Vektor $\vec{a} \in V$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1$ ist definiert durch
$$\vec{a} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 \,.$$

(a) Zeigen Sie, dass in der Basisdarstellung zu $\mathcal{B}_1$ folgt
$$\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle \neq \sum_i a_i b_i \,.$$

(b) Seien nun $\vec{v}_1 = (1,0)^T$ und $\vec{v}_2 = (1,1)^T$. Finden Sie nun eine Basis $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$, sodass
$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in V : \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = \sum_i \tilde{a}_i b_i ,$$
wobei die Koordinatendarstellung bezüglich $\mathcal{B}_2$ definiert ist durch
$$\vec{a} = \tilde{a}_1 \vec{w}_1 + \tilde{a}_2 \vec{w}_2 \,.$$
Fertigen Sie eine Skizze an.
Hinweis: Fertigen Sie die Skizze zuerst an und überlegen Sie sich wie die Basis konstruiert werden muss.

(c) Man nennt die Basis $\mathcal{B}_2$ die zu $\mathcal{B}_1$ duale Basis. Zeigen Sie, dass eine Orthonormalbasis zu sich selbst dual ist.

21. **Kreuzprodukt (10 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie für
$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T$$
die Kreuzprodukte:
$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \qquad \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 \qquad \vec{v}_3 \times \vec{v}_1$$
Untersuchen Sie das Ergebnis auf lineare Abhängigkeit

Bitte wenden! →

(b) Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$. Benutzen Sie das Levi-Cevita Symbol und zeigen bzw. berechnen Sie

i.
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

ii.
$$\langle \vec{a} \times \vec{b} | \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \langle \vec{a} | \vec{c} \rangle \langle \vec{b} | \vec{d} \rangle - \langle \vec{a} | \vec{d} \rangle \langle \vec{b} | \vec{c} \rangle$$

iii.
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

iv.
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}))$$

v.
$$\langle \vec{a} | \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \langle \vec{c} | \vec{a} \times \vec{b} \rangle = \langle \vec{b} | \vec{c} \times \vec{a} \rangle$$

22. **Festkörper (5 Punkte)**
In einem Festkörper sind die Atome in einem regelmäßigen Gitter angeordnet. Die Lage eines jeden Atoms kann durch Vielfaches der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ beschrieben werden. Diese seien durch $\vec{a}_1 = (3, 0, 0) \times 10^{-10}$m, $\vec{a}_2 = (2, 2, 0) \times 10^{-10}$m, $\vec{a}_3 = (0, 0, 5) \times 10^{-10}$m bzgl. kartesischer Koordinaten gegeben.

(a) Berechnen Sie das Spatprodukt $\langle \vec{a}_1 \mid \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 \rangle$. Welche anschauliche Bedeutung hat das Spatprodukt?

(b) Für viele Anwendungen ist das sogenannte reziproke Gitter zweckmäßig, welches gegeben ist durch
$$\vec{b}_i = \frac{\vec{a}_j \times \vec{a}_k}{\langle \vec{a}_1 \mid \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 \rangle},$$
wobei $i, j, k = 1, 2, 3$ und zyklisch vertauscht. Berechnen Sie für die oben angegebenen Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$.