INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. W. Brenig
M.Sc. Boris Celan

Quantentheorie WS 2014/15

7. Übungsblatt Abgabe: Di, 09.12.2014 bis 11.30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1415/quanten`.

18. **Harmonischer Oszillator I (11 Punkte)**
Der Hamilton-Operator des eindimensionalen harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{r}^2.$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, wie das Spektrum mittels der Auf- und Absteigeoperatoren

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{r} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}, \qquad \hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{r} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}$$

bestimmt werden kann. Hier wollen wir eine Ortsdarstellung der Eigenvektoren $|\, n \,\rangle$ mit

$$\hat{H}\,|\, n \,\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})\,|\, n \,\rangle$$

bestimmen.

(a) Setzen Sie die Ortsdarstellung von $\hat{p}$ in die Operatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ ein und drücken Sie diese durch die dimensionslose Größe $q = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}r$ aus.

(b) Interpretieren Sie die Bedingung

$$\hat{a}\,|\, 0 \,\rangle = 0$$

als Differentialgleichung für die Grundzustandswellenfunktion $\Psi_0(q) = \langle\, q \mid 0 \,\rangle$ und bestimmen Sie die normierte ($\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}r\, |\Psi_0(r)|^2 = 1$) Lösung von $\Psi_0(q)$.

(c) Zeigen Sie durch wiederholte Anwendung von $\hat{a}^\dagger$ auf $\Psi_0(q)$, dass $\Psi_n(q) \propto (\hat{a}^\dagger)^n \Psi_0(q)$ die Form

$$\Psi_n(q) = C_n e^{-q^2/2} H_n(q)$$

hat. Hierbei ist $H_n(q)$ das $n-$te Hermite-Polynom

$$H_n(q) = e^{q^2/2}(q - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q})^n e^{-q^2/2}.$$

Bestimmen Sie die Normierungskonstante C_n.

(d) Leiten Sie aus den Relationen $\hat{a}\,|\, n \,\rangle = \sqrt{n}\,|\, n-1 \,\rangle$ und $\hat{a}^\dagger\,|\, n \,\rangle = \sqrt{n+1}\,|\, n+1 \,\rangle$ eine Rekursionsrelation für $H_n(q)$ her. Bestimmen Sie daraus H_n mit $n = 1, 2, 3, 4$.
Wieviele Nullstellen hat $H_n(q)$ (Knotensatz) ?

(e) Skizzien Sie $\frac{\Psi_n(q)}{\sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar}}}$ für $n = 0, 1, 2$ und 3.

Bitte wenden! →

19. **Harmonischer Oszillator II (9 Punkte)**
Wir wollen nun einen alternativen Zugang zum eindimensionalen harmonischen Oszillator entwickeln.

(a) Bringen Sie die stationäre Schrödingergleichung zu dem Hamilton-Operator aus Aufgabe (18) in die Form

$$\frac{\hbar\omega}{2}\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}q^2}+q^2\right)\Psi_n(q)=E_n\Psi_n(q).$$

(b) Geben Sie eine normierbare Lösung der Differentialgleichung

$$\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}q^2}+q^2-1\right)f(q)=\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}+q\right)\left(+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}+q\right)f(q)=0$$

an.
Bemerkung: Hierbei erhalten Sie einen Hinweis auf die Asymptotik von $\Psi_n(q)$ für große q.

(c) Das Ergebnis aus Aufgabenteil (b) motiviert folgenden Lösungsansatz

$$\Psi_n(q)=e^{-q^2/2}\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l q^l.$$

Setzen Sie diesen Ansatz in die Differentialgleichung aus Aufgabenteil (b) ein und zeigen sie durch Vergleich der Koeffizienten gleicher q-Potenzen, dass die α_l folgende Rekursionsrelation erfüllen

$$(l+2)(l+1)\alpha_{l+2}=\left((2l+1)-\frac{2E_n}{\hbar\omega}\right)\alpha_l.$$

(d) Begründen Sie, warum aus der Normierbarkeit der Wellenfunktion $\Psi_n(q)$ eine Abbruchbedingung $\alpha_l=0$ für $l>l_0$ folgt. Leiten Sie aus dieser Abbruchbedingung einen Ausdruck für die Energieeigenwerte E_n her.

(e) Lösen Sie die Rekursionsrelation aus Aufgabenteil (c) für die α_l mit der Abbruchbedingung aus Aufgabenteil (d) für den Grundzustand $n=0$. Geben Sie schließlich die explizite Form der normierten Wellenfunktion $\Psi_0(r)$ an.