Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. Wolfram Brenig
Niklas Casper
Erik Wagner

Elektrodynamik SS 2018

7. Übungsblatt

Abgabe: Do, 31.05.2018 bis 09:45 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-bs.de/theophys/edu/sose18/edyn`.

28. **Wissensfragen (3 Punkte)**

    (a) Zeichnen Sie die elektrischen Feldlinien und die Äquipotentiallinien eines Dipols und eines Quadrupols.

    (b) Was ist die Nahzone einer Multipolentwicklung?

29. **Drehmoment auf einen Dipol (3 Punkte)**

    Berechnen Sie das Drehmoment auf einen reinen Dipol $\vec{p}$ in einem externen Feld $\vec{E}$.
    Hinweis: Verfahren Sie analog zur Berechnung der Kraft auf einen Dipol im externen $\vec{E}$-Feld.

30. **Residuensatz (4 Punkte)**

    (a) Berechnen Sie mit $z \in \mathbb{C}$
    $$\oint_C \frac{1}{z^6+1} dz \,,$$
    wobei sich C aus den Teilstücken $C_1 = \{z \,|\, |z| = R; \operatorname{Im} z > 0\}$ und $C_2 = \{z \,|\, -R \leq \operatorname{Re} z \leq R; \operatorname{Im} z = 0\}$ mit $R > 0$ zusammensetzt.

    (b) Berechnen Sie mit $z \in \mathbb{C}$
    $$\oint_C \frac{e^{ikz}}{z^2+a} dz \,,$$
    wobei $a, k \in \mathbb{R}$ und die Kurve C der Kreis mit Radius $|z| = 2|a|$ ist.

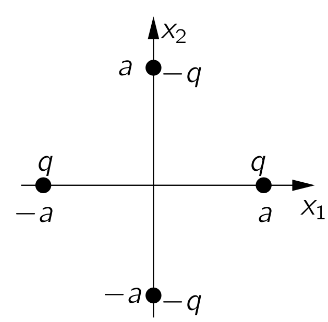
31. **Multipolentwicklung (9 Punkte)**

    Berechnen Sie das Monopol-, Dipol- und Quadrupolmoment der folgenden Ladungsverteilungen bezüglich des Koordinatenursprungs:

    (a) Vier Punktladungen q und $-q$ wie rechts in der Skizze dargestellt.

    (b) Homogen geladene Kugelschale mit Radius R, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt.

    (c) Zylinder mit Radius R und Länge L, sowie mit folgender Raumladungsdichte: $\rho(\underline{r}) = \{c\, x_3^n; \quad c = \text{const}, n \in \mathbb{N} \text{ für } -L/2 \leq x_3 \leq L/2 \text{ und } x_1^2 + x_2^2 \leq R^2\}$



Geben Sie außerdem jeweils die Beiträge der einzelnen Momente zum Potenzial $\Phi(\vec{r})$ an.

Bitte wenden! →

32. **Feld einer Linienladung (3 Punkte + 8 Bonuspunkte)**

Betrachten Sie in zwei Raumdimensionen eine Ladung auf einer endlichen Linie der Länge L entlang der x-Achse mit konstanter Linienladung λ.

(a) Berechnen Sie das Potential Φ und das elektrische Feld $\vec{E}$ entlang der x-Achse außerhalb der Linienladung.

(b) Berechnen Sie das Potential Φ und das elektrische Feld $\vec{E}$ für einen beliebigen Punkt $\vec{r}$ abseits der x-Achse.

(c) Zeigen Sie, dass ihre Ergebnisse für das elektrische Feld $\vec{E}$ aus (a) und (b) bei $\lambda = q/L$ mit $q = \text{const}$ für $L \to 0$ mit denen für eine Punktladung q übereinstimmen.

(d) **(Bonus)** Visualisieren Sie den Verlauf der Äquipotenziallinien $\Phi(\vec{r}) = \text{const.}$ und die Feldlinien von $\vec{E}$

- einer Linienladung,
- zweier paralleler Linienladungen,
- zweier orthogonaler Linienladungen, die den gleichen Mittelpunkt besitzen und
- einer Linienladung und einer Punktladung

für $q = \text{const}$. Sie können hierfür ein beliebiges Computer-Programm zur Hilfe nehmen. Als Beispiel ist auf der Internetseite ein Mathematica-Notebook bereitgestellt, das Sie als Grundlage benutzen können.

(e) **(Exkursions-Bonus)** Designen Sie eine Ladungsanordnung in deren Äquipotenziallinien sich eine Brezel erkennen lässt.

Hinweis:

- Parametrisieren Sie die Integration in (b) durch den Winkel zwischen der Verbindungslinie $\vec{r}$ zum Integrationspunkt und dem Lot zur x-Achse.
- Das Integral
$$\int d\theta \frac{1}{\cos\theta} = \ln\left(\tan\theta + \frac{1}{\cos\theta}\right) \tag{1}$$
könnte hilfreich sein.
- Das lauffähige Programm sollte mit einer kurzen Bedienungsanleitung an n.casper@tu-bs.de geschickt werden, um eine Überprüfung des Programms zu ermöglichen.

33. **Finite-Differenzen-Methode (3 Punkte + 12 Bonuspunkte)**

Ziel dieser Aufgabe ist es die Maxwell-Gleichung $\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$ in zwei Raumdimensionen mithilfe der Finite-Differenzen-Methode zu lösen.

(a) Schreiben Sie die Maxwell-Gleichung in eine Poisson-Gleichung mit dem Potential Φ um.

(b) Diskretisieren Sie die Poisson-Gleichung auf einem Gitter der Größe $N \times N$. Erinnern Sie sich an die Defintion des Differenzenquotienten, um die notwendigen Ableitungen zu diskretisieren.

Bitte wenden! $\rightarrow$

(c) **(Bonus)** Schreiben Sie ein Programm, das für eine beliebige Ladungsdichte mithilfe der Finite-Differenzen-Methode die Poisson-Gleichung löst.
Testen Sie Ihr Programm mit einer Ladungsverteilung für (viele) Punktladungen entlang einer Achse und vergleichen Sie mit 32. (c).
Nutzen Sie zur Implementierung eine der folgendenden Programmiersprachen C++, Java, Mathematica oder Python. Greifen Sie dabei nicht auf die mitgelieferten Bibliotheken der Programmiersprache zur Lösung einer Differentialgleichung zurück.

(d) **(Bonus)** Messen Sie die benötigte Zeit Ihrer Berechnung für einen Quadrupol in Abhängigkeit der Größe N. Plotten Sie diese Abhängigkeit. Die besten Programme werden im Anschluss in der Vorlesung ausgezeichnet.

(e) **(Bonus)** Das Programm soll nach Eingabe der Größe N eine Visualisierung der Äquipotenziallinien $\Phi(\vec{r}) = \text{const.}$ ausgeben. Reproduzieren Sie die Ergebnisse aus 32. (d).

Hinweise:

- Nutzen Sie das Jacobi-Verfahren, um die diskretisierte Poisson-Gleichung zu lösen. Das Jacobi-Verfahren ist ein Algorithmus zur näherungsweisen Lösung von linearen Gleichungssystemen. Sei ein lineares Gleichungssystem mit N Variablen und N Gleichungen gegeben

$$
\begin{aligned}
a_{11} \cdot V_1 + \cdots + a_{1N} \cdot V_N &= b_1 \\
&\vdots \\
a_{N1} \cdot V_1 + \cdots + a_{NN} \cdot V_N &= b_N \,.
\end{aligned}
$$

  Um dieses Gleichungssystem zu lösen, wird die i-te Gleichung nach der i-ten Variablen V_i aufgelöst

$$
V_i^{(n+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{i \neq j} a_{ij} \cdot V_j^{(n)} \right) \,, i = 1, \ldots, N \,,
$$

  wobei diese Ersetzung, ausgehend von einem Startvektor $V^{(0)}$, iterativ wiederholt wird.
- Wählen Sie als Randbedingung $\Phi = 0$ außerhalb des $N \times N$-Gitters.
- Das lauffähige Programm sollte mit einer kurzen Bedienungsanleitung an n.casper@tu-bs.de geschickt werden, um eine Überprüfung des Programms und eine Vergleichbarkeit der Laufzeiten zu ermöglichen.