INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. Björn Willenberg
M.Sc. Boris Celan

Rechenmethoden II — SoSe 2013

7. Übungsblatt — Abgabe: Di, 04.06.2013 bis 11.30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-braunschweig.de/theophys/edu/sose13/rm213`.

21. **Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen**
    Wir betrachten eine Funktion $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad z = x + iy \quad x, y \in \mathbb{R}$.
    Zeigen Sie: $f$ ist genau dann holomorph, wenn die Bedingung

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0$$

erfüllt ist. *Hinweis:* Schreiben Sie $x$ und $y$ als Funktion von $z$ und $z^*$ und benutzen Sie die Kettenregel für $f$.

22. **Komplexe Kurvenintegrale**
    (a) Berechnen Sie das Integral $\oint (z^*)^2 \, \mathrm{d}z$ entlang der Kreise $|z| = 1$ und $|z-1| = 1$ im mathematisch positiven Sinn.
    (b) Berechnen Sie das Integral $\int e^z \, \mathrm{d}z$ entlang des Weges $0 \to 1 \to 1+i$.

23. **Cauchy'scher Integralsatz**
    (a) Prüfen Sie den Cauchy'schen Integralsatz, indem Sie explizit

$$\int_0^{1+i} (z^2+1) \, \mathrm{d}z$$

   i. entlang des direkten Weges $0 \to 1+i$,
   ii. entlang der zwei Geraden $0 \to 1 \to 1+i$ und
   iii. entlang eines Viertelkreises mit Mittelpunkt in $z = i$

   berechnen.

   (b) Für welche der folgenden Integrale kann der Cauchy'sche Integralsatz direkt angewandt werden?

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z+2i} \mathrm{d}z \qquad \oint_{|z|=b} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+bz+1}; \; 0<b<1 \qquad \oint_{|z|=3} \frac{\mathrm{d}z}{1-e^z}$$

   (c) Zeigen Sie mithilfe des Cauchy'schen Integralsatzes:

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \left[\cos\left(\sin\theta + \theta\right)\right] \mathrm{d}\theta = 0$$

   *Hinweis:* Betrachten Sie $\oint e^z \mathrm{d}z$ auf dem Einheitskreis.