INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. W. Brenig
M.Sc. Boris Celan
M.Sc. Niklas Casper

Physikalische Rechenmethoden I — WiSe 2016/17

6. Übungsblatt — Abgabe: Do, 01.12.2016 bis 11.30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1617/rm1617`.

16. **Lehrsätze aus der ebenen Geometrie (6 Punkte)**
Beweisen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung folgende Lehrsätze aus der ebenen Geometrie:

   (a) Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

   (b) Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich im Verhältnis 2:1.

   (c) Die Seitenmittelpunkte eines (beliebigen) Vierecks bilden die Ecken eines Parallelogramms.

   Fertigen Sie zur Unterstützung der Beweisführung Skizzen an.

17. **Vektorraum aus Funktionen (4 Punkte)**
Zeigen Sie, dass die Lösungen der Differentialgleichung

$$c^2 \frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = -\omega^2 \psi(x),$$

   mit $\omega, c > 0$ einen Vektorraum bilden.

18. **Basis und Basiswechsel (4 Punkte)**
Gegeben seien 3 Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ sowie drei weitere Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ ebenfalls eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

   (b) Gegeben seien nun die zwei Vektoren:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 17 \\ 42 \end{pmatrix}, \vec{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   Stellen Sie diese beiden Vektoren:

   i. als Linearkombination der Vektoren der Standardbasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ und

   ii. als Linearkombination der Basis $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ dar.

Bitte wenden! →

19. **Skalarprodukt der quadratintegrablen Funktionen (6 Punkte)**
In der Quantenmechanik ist der Raum der quadratintegrablen Funktionen von Interesse. Diese sind für ein Intervall $S \subset \mathbb{R}$ definiert:

$$\int_S |f(x)|^2 \, dx < \infty$$

Der Raum der quadratintegrablen Funktionen wird häufig als $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ bezeichnet.

(a) Für beliebige quadratintegrable, reelwertige Funktionen $g, f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ sei das Skalarprodukt in folgender Form definiert:

$$\langle f \mid g \rangle = \int_S f(x)g(x)dx$$

Zeigen Sie, dass dabei die Eigenschaften eines Skalarproduktes erfüllt werden.

(b) Die folgenden Funktionen

$$f(x) = 4x + 8x^3$$
$$g(x) = 2x^2 + 9x^4$$

bilden ein Ortho**gonal**system auf dem Intervall $S = [-1, 1]$. Weisen Sie die Orthogonalität nach und finden Sie eine geeignete Normierung der Funktionen, um daraus ein Ortho**normal**system zu bilden.