



Übungsblätter gibt es unter <https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1415/quanten>.

16. Matrizen I: Stern-Gerlach-Experiment und Messtheorie (13 Punkte)

Die drei Pauli-Matrizen σ_x, σ_y und σ_z spannen zusammen mit der 2×2 Einheitsmatrix $\mathbb{1}_2$ den Raum der komplexen 2×2 Matrizen auf. Sie sind definiert als

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Die Wechselwirkung zwischen einem sogenannten "Spin"-1/2 Teilchen mit Masse m und einem Magnetfeld B in x-Richtung wird beschrieben durch den Hamilton-Operator

$$H_S = -C\sigma_x,$$

wobei $C = \frac{eB\hbar}{2mc}$ ist. Stellen Sie H_S sowie den Zeitentwicklungsoperator

$$U(t) = e^{\frac{-iH_S t}{\hbar}}$$

als 2×2 -Matrizen dar.

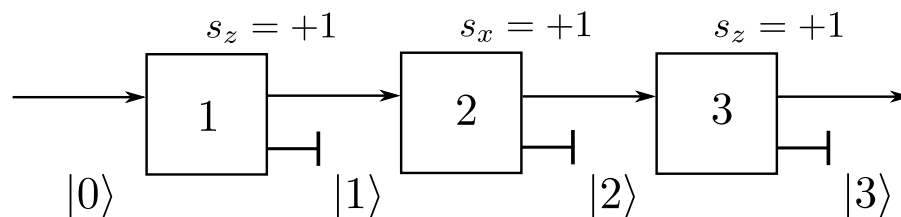
- (b) Geben Sie die Eigenwerte und -vektoren der drei Pauli-Matrizen an.
 (c) Der Spin-Zustand $s_\alpha \in \mathbb{R}$ bezüglich der Richtung $\alpha = x, y, z$ wird definiert als Eigenwert der Pauli-Matrix σ_α , d.h.

$$\sigma_\alpha |s_\alpha\rangle = s_\alpha |s_\alpha\rangle.$$

Ein freies Teilchen ($B = 0$, d.h. Spin-Anteil des Hamilton-Operators $H_S = 0$) werde nun im $s_z = +1$ Zustand präpariert

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nun werden nacheinander drei Stern-Gerlach-Experimente¹ durchgeführt:



Bei einer ersten Messung wird bestimmt, ob das Teilchen im Zustand $s_z = +1$ bzgl. der z-Richtung ist, in der zweiten, ob der Zustand $s_x = +1$ bzgl. der x-Richtung ist und schließlich in der dritten noch einmal, ob der Zustand $s_z = +1$ bzgl. der z-Richtung ist.

Bitte wenden! →

¹1943 erhielt Otto Stern für den nach Walther Gerlach und Ihm benannten Versuch den Nobelpreis für Physik.

- i. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, mit dem gegebenen Anfangszustand $|0\rangle$, das Teilchen bei der ersten Messung im Zustand $s_z = +1$ zu finden. Wie lautet der Zustand $|1\rangle$ nach dieser ersten Messung?
 - ii. Wie ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen bei der zweiten Messung im Zustand $s_x = +1$ zu finden und wie lautet der Zustand $|2\rangle$ nach dieser Messung?
 - iii. Wie ist die Wahrscheinlichkeit bei der dritten Messung noch einmal den Zustand $s_z = +1$ zu messen?
- (d) Berechnen Sie simultan die Erwartungswerte $\langle\sigma_x\rangle$ und $\langle\sigma_y\rangle$ sowie deren Schwankungsquadrate $(\Delta\sigma_\alpha)^2 = \langle\sigma_\alpha^2\rangle - \langle\sigma_\alpha\rangle^2$ ($\alpha = x, y$) im Zustand $|0\rangle$. Berechnen Sie zusätzlich noch die Erwartungswerte des Kommutators $\langle[\sigma_x, \sigma_y]\rangle$, sowie die Erwartungswerte des Antikommutators $\langle\{\sigma_x, \sigma_y\}\rangle$ (wobei $\{\sigma_x, \sigma_y\} = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x$) in dem Zustand $|0\rangle$. Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse im Blick auf die verallgemeinerte Unschärferelation aus der Vorlesung.

17. Matrizen II: Tensorieren von Matrizen und Symmetrien (7 Punkte)

Wir bilden das Tensorprodukt $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^4$ und führen darin mit Hilfe der Paulimatrizen σ_x, σ_y und σ_z die folgenden Operatoren ein

$$H = \sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y, \quad Z = \sigma_z \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_2 \otimes \sigma_z,$$

sowie die Vertauschungs-Operation R , so dass für $|a\rangle, |b\rangle \in \mathbb{C}^2$ gilt

$$R(|a\rangle \otimes |b\rangle) = |b\rangle \otimes |a\rangle.$$

- (a) Stellen Sie H, Z und R als 4×4 Matrizen dar.

Hinweis: Für das Tensorprodukt zweier Vektoren gilt

$$|a\rangle \otimes |b\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_1 b_2 \\ a_2 b_1 \\ a_2 b_2 \end{pmatrix}.$$

Für das Tensorprodukt zweier 2×2 Matrizen gilt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

- (b) Prüfen Sie, dass H, Z und R paarweise kommutieren (d.h. $[H, Z] = [H, R] = [Z, R] = 0$).
- (c) Geben Sie eine gemeinsame Basis von Eigenvektoren von H, Z und R an. Wie lauten die zugehörigen Eigenwerte von H, Z und R ?