INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. W. Brenig
M.Sc. Boris Celan
M.Sc. Niklas Casper

Physikalische Rechenmethoden I WiSe 2016/17

5. Übungsblatt Abgabe: Do, 23.11.2016 bis 11.30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1617/rm1617`.

13. **Integrale (6 Punkte)**
Lösen Sie die nachfolgenden Integrale unter Angabe der verwendeten Integrationsregel(n) und nutzen Sie dafür ggf. die Partialbruchzerlegung:

(a) $$\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$$

(b) $$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x \quad , \quad a \neq 0$$

(c) $$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x \quad , \quad a \neq 0$$

(d) $$\int \frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x$$

(e) $$\int \frac{2x^2-5x+2}{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x$$

(f) $$\int \frac{Ax+B}{Cx^2+Dx+E}\,\mathrm{d}x \quad , \quad A,B,C,D,E \in \mathbb{R}$$

Bitte geben Sie Ihren Lösungsweg nachvollziehbar an.

Hinweis zu (b): Substituieren Sie $x = sin(u)$.

14. **Gaußsches Wellenpaket und Heisenbergsche Unschärferelation (8 Punkte)**
In der Quantenmechanik wird der Zustand eines Teilchens durch die Wellenfunktionen $\phi(x)$ beschrieben. Wir betrachten ein Gaußsches Wellenpaket im Ursprung:

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{(1/4)}\sqrt{\Delta x}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(\Delta x)^2}\right) ,$$

wobei $(\Delta x)^2$ als Varianz des Ortes definiert ist und eine Konstante ist. Zur Untersuchung verschiedener Eigenschaften des Teilchens gehen wir wie folgt vor:

(a) Berechnen Sie das Integral und bestimmen Sie c_1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x = c_1$$

Betrachten Sie dafür zunächst

$$c_1^2 = c_1 \times c_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2)\,\mathrm{d}y\,.$$

Substituieren Sie in dem entstehenden Integral $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$ mit $\phi \in [0, 2\pi]$ und $r \in [0, \infty]$.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass das Volumenelement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$ ist.

Bitte wenden! →

(b) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion normiert ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 1$$

Mit dieser Eigenschaft macht eine Interpretation von $|\phi(x)|^2$ als Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens Sinn.
Hinweis: Benutzen Sie ihr Ergebnis aus der vorherigen Teilaufgabe.

(c) Die Varianz des Ortes $(\Delta x)^2$ ist definiert als

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \, ,$$

wobei $\langle x \rangle$ der Erwartungswert des Ortes ist.

i. Bestimmen Sie den Erwartungswert des Ortes $\langle x \rangle$:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \, |\phi(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

ii. Bestimmen Sie den Erwartungswert von $\langle x^2 \rangle$ mit:

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, |\phi(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

iii. Geben Sie die Varianz $(\Delta x)^2$ an.

(d) Manchmal macht es Sinn sich statt der Ortsabhängigkeit der Wellenfunktion $\phi(x)$ die Impulsabhängigkeit $\phi(p)$ anzuschauen. Die Umrechnung erfolgt mithilfe eines Integrals (Fouriertransformation):

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} \, \phi(x) \, \mathrm{d}x$$

i. Bestimmen Sie $\phi(p)$.

ii. Bestimmen Sie analog zum Ort die Varianz des Impulses, wobei gilt

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p \, |\phi(p)|^2 \, \mathrm{d}p$$

und $(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$.

iii. Was passiert mit Δp wenn Sie das Gaußpaket sehr genau bestimmt haben, d.h. Δx klein ist? Berechnen Sie $\Delta x \, \Delta p$.

Bitte wenden! →

15. **Integralkriterium (6 Punkte)**
Zeigen Sie mit dem Integralkriterium, ob die Reihen

(a)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^{\epsilon}}, \epsilon > 0$$

(b)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\pi)}{n\pi}$$

konvergieren.

Hinweis zu (a): Betrachten Sie den Betrag der Reihenglieder $\pm \sum |a_n|$.

Hinweis zu (b): Zeigen Sie, dass

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sin(x) e^{-xy} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

gilt und nutzen Sie es.