INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. Wolfram Brenig
Niklas Casper
Erik Wagner

Thermodynamik und Quantenstatistik WS 2018/19

5. Übungsblatt

Abgabe: Di, 20.11.2018 bis 11:30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1819/thermo1819`.

19. **Wissensfragen (3 Punkte)**

Bitte benennen Sie alle verwendeten Symbole und Größen.

(a) Geben Sie den statistischen Operator und die Entropie jeweils in der mikrokanonischen, der kanonischen und der großkanonischen Gesamtheit an.

(b) Sie kombinieren zwei unabhängige Systeme mit Entropie S_1 und S_2, die jeweils durch den statistischen Operator ρ_1 bzw. ρ_2 beschrieben werden. Geben Sie den statistischen Operator ρ und die Gesamtentropie S des neuen Gesamtsystems an.

20. **Entropie in der Informationstheorie (6 Punkte + 2 Bonuspunkte)**

Wir betrachten ein Experiment bei dem die Ereignisse E_n , wobei $n = 1, 2, \ldots, N$, mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten p_n

$$\sum_n p_n = 1 \tag{1}$$

eintreten können. Wir ordnen nun der Messung eines Ereignisses E_n einen Informationsgehalt $I_n = -\log_2 p_n$ zu.[1] Bei häufiger Wiederholung von solchen Messungen erhält man einen mittleren Informationsgehalt, festgelegt als

$$I = -\sum_n p_n \log_2 p_n. \tag{2}$$

Diese Definition ist so gewählt, dass sie die mittlere Anzahl von einfachen Alternativfragen (Ja oder Nein, 0 oder 1) angibt, die zur vollständigen Charakterisierung eines Ereignisses gestellt und beantwortet werden müssen.

Beispiele:

1) $N = 1$. Ein Ereignis tritt mit Sicherheit ein, $p_n = 1$. In diesem Fall ist $I = 0$. Man gewinnt keine Information, da der Eintritt des Ereignisses von vornherein feststeht.

2) $N = 2$. $p_1 = p_2 = 1/2$. Beide Ereignisse treten mit der gleichen Wahrscheinlichkeit ein. Durch Einsetzen erhält man $I = 1$ bit.[2]

Bitte wenden! →

[1] $\log_2$ ist der Logarithmus zur Basis 2.
[2] bit ist die Einheit der Information und entspricht einer 0 oder 1 Entscheidung.

Aufgaben:

(a) Ein Hund hält sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit $p_n = 1/128$ auf den 128 Fliesen am Boden eines rechteckigen Raumes, der doppelt so lang wie breit ist, auf. Wie groß ist der mittlere Informationsgehalt der Feststellung des Aufenthaltsorts?[3]

(b) Ein Fabrikant möchte 3000 Bälle in den Farben rot, grün und blau produzieren. Wieviele Bälle von jeder Farbe muss er herstellen, wenn er möglichst viele verkaufen will, über die Beliebtheit der verschiedenen Farben bei Kindern aber keine Erhebungen angestellt hat? Versuchen Sie zuerst durch Argumentieren auf ein Ergebnis zu kommen und berechnen Sie dann die Information dieser Verteilung.

(c) Erinnert die Definition des mittleren Informationsgehalts nicht an die Entropie? Schreiben Sie in einem Satz, warum größere Entropie mit mehr Informationsgehalt zu identifizieren ist.

Bonusaufgabe:

(d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_n, unter denen der mittlere Informationsgehalt aus Glg. (2) maximal wird. Berücksichtigen Sie die Nebenbedingung aus Glg. (1).

21. **Maximierung der Entropie unter Nebenbedingungen (8 Punkte)**

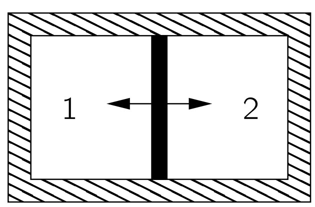
Finden Sie die eindimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung $\rho = f(x)$, die die Entropie

$$S = -k \langle \ln \rho \rangle = -k \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln (f(x))\, \mathrm{d}x$$

maximiert. Beachten Sie dabei die Nebenbedingungen $\langle x \rangle = 0$ und $\langle x^2 \rangle = a$ und finden Sie für $f(x)$ eine weitere Nebenbedingung selbst. Benutzen Sie die Methode der Lagrange-Multiplikatoren.

22. **Maximierung der Entropie II (3 Punkte)**

Aus der Vorlesung kennen Sie die mikrokanonische, die kanonische und die großkanonische Gesamtheit. Wir betrachten nun zwei abgeschlossene Systeme, zwischen denen eine für Teilchen undurchlässige, aber bewegbare Wand ist. Maximieren Sie die Entropie unter der Nebenbedingung, dass die Gesamtenergie $E = E_1 + E_2$ und das Gesamtvolumen $V = V_1 + V_2$ konstant sind. Was ist der Gleichgewichtsparameter der Energie (des Volumens)?



[3] Man sieht, dass in der Definition von I keine Bewertung des Informationsgehalts (etwa nützlich – unnütz) enthalten ist.