



Übungsblätter gibt es unter <https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1415/quanten>.

12. Schwarzsche Ungleichung (4 Punkte)

Wir bezeichnen das Skalarprodukt zweier Vektoren $|a\rangle$ und $|b\rangle$ mit $\langle a|b\rangle$. Zu den Eigenschaften eines positiv semidefiniten Skalarproduktes zählt, dass $\langle a|a\rangle \geq 0$ und Gleichheit genau dann gilt, wenn $|a\rangle$ der Nullvektor ist. Man kann dann mittels $\| |a\rangle \| = \sqrt{\langle a|a\rangle}$ eine Norm einführen. Zeigen Sie, dass die Schwarzsche Ungleichung

$$\| |a\rangle \| \| |b\rangle \| \geq |\langle a|b\rangle|$$

gilt.

13. Dualer-Raum und Hilbertscher Folgenraum (5 Punkte)

Zu einer Basis $|k\rangle$ eines Hilbertraums $\mathcal{H}$ definieren wir die duale Basis $\langle k'|$ so, dass bezüglich des Skalarprodukts $\langle \cdot | \cdot \rangle$ gilt

$$\langle k'|k\rangle = \delta_{k',k} \quad (1)$$

(a) Wir betrachten nun den Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathbb{C}^3$ und eine Basis dieses Raums

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |3\rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ i \end{pmatrix}.$$

Geben Sie zu dieser Basis die duale Basis $\langle 1|$, $\langle 2|$, $\langle 3|$ an, so dass Gl.(1) für das Standardskalarprodukt in $\mathbb{C}^3$ erfüllt ist.

(b) Der Hilbertsche Folgenraum ℓ^2 ist ein Hilbertraum der definiert ist als die Menge aller Folgen a_n , $n \geq 1$, für die $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ endlich ist

$$\ell^2 = \left\{ |\{a_n\}\rangle = |a_1, a_2, a_3, \dots\rangle \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Auf dem Hilbertschen Folgenraum ℓ^2 ist das Skalarprodukt gegeben durch

$$\langle \{a_n\} | \{b_n\} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* b_n.$$

Eine Basis von ℓ^2 ist $|1\rangle = |1, 0, \dots\rangle$, $|2\rangle = |1, 1, 0, \dots\rangle$, $|3\rangle = |1, 1, 1, 0, \dots\rangle$, D.h. $|k\rangle$ ist gegeben durch die Folge $a_n = 1$ für $n \leq k$ und $a_n = 0$ für $n > k$. Geben Sie hierzu die duale Basis $\langle k'|$ an, so dass für das Skalarprodukt Gl.(1) erfüllt ist.

Bitte wenden! →

14. **Skalarprodukte und Impulsoperator auf L^2 (7 Punkte)**

Sei $\mathcal{H}$ der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen f auf dem Intervall $[0, 2\pi]$, so dass sowohl f als auch f' quadratintegrabel sind. Das Skalarprodukt auf $\mathcal{H}$ ist gegeben durch

$$\langle f | g \rangle = \int_0^{2\pi} dx f^*(x)g(x).$$

Wir betrachten den Operator

$$P = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$$

auf folgenden alternativen Definitionsbereichen

$$\mathcal{D}_0(P) = \{f \in \mathcal{H} \mid f(0) = f(2\pi) = 0\} \subset \mathcal{D}_\alpha(P) = \{f \in \mathcal{H} \mid f(2\pi) = e^{i\alpha}f(0)\}.$$

- (a) Geben Sie eine Formel für $P^\dagger$ an. Bestimmen Sie $\mathcal{D}_0(P^\dagger)$ und $\mathcal{D}_\alpha(P^\dagger)$ für die Definitionsbereiche $\mathcal{D}_0(P)$ und $\mathcal{D}_\alpha(P)$.
- (b) Wir betrachten nun den Hamiltonoperator eines freien Teilchens

$$H = \frac{P^2}{2m}$$

auf $\mathcal{D}_0(P)$ und $\mathcal{D}_\alpha(P)$. Bestimmen Sie jeweils das Eigenwertspektrum von H .

15. **Kommutatoren (4 Punkte)**

Mit Hilfe des Produkts AB zweier Operatoren A, B in einem Hilbertraum definiert man den Kommutator

$$[A, B] := AB - BA.$$

- (a) Zeigen Sie, dass für drei Operatoren A, B und C folgende Identität gilt

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$$

- (b) Zeigen Sie, dass die Jacobi-Identität

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

gilt.