Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. W. Brenig
M.Sc. Boris Celan
Dipl.-Phys. Björn Willenberg

Thermodynamik und Quantenstatistik WiSe 2013/14

5. Übungsblatt Abgabe: Di, 19.11.2013 bis 11.30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1314/thermo1314`.

11. **Rechnen mit Fakultäten**
Eine hilfreiche Abschätzung in der statistischen Physik ist:

$$\ln(n!) \approx n\ln(n) - n; \quad n \in \mathbb{N},\ n \gg 1.$$

(a) Finden Sie für diese Näherung eine einfach Begründung.

(b) Zeigen Sie, dass man mithilfe der Stirlingformel

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

die gegebene Abschätzung auch erhalten kann.

(c) Ab welchem n ist die relative Abweichung von $\ln(n!)$ kleiner als 1% für:

i. $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$
ii. $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n$
iii. $n! \approx n^n$

Technische Hilfsmittel sind in dieser Teilaufgabe erlaubt, geben Sie Ihren Lösungsweg mit an.

12. **Entropie und Information**
Wir betrachten eine Reihe von Ereignissen E_n, $(n = 1, 2, \ldots, N)$, die mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten p_n mit

$$\sum_n p_n = 1$$

eintreten können. Wir ordnen nun der Feststellung eines Ereignisses E_n einen Informationswert I_n zu, bei häufiger Wiederholung von solchen Feststellungen an der gleichen Reihe von Ereignissen erhält man dann einen mittleren Informationsgehalt, festgelegt als[1]

$$I = -\sum_n p_n \log_2 p_n.$$

Diese Definition ist so gewählt, dass sie die mittlere Anzahl von einfachen Alternativfragen (Ja oder Nein, 0 oder 1) angibt, die zur vollständigen Charakterisierung eines Ereignisses der Reihe nach gestellt und beantwortet werden müssen.

Bitte wenden! →

[1] $\log_2$ ist der Logarithmus zur Basis 2.

Beispiele:

(a) $N = 1$. Ein Ereignis tritt mit Sicherheit ein, $p_n = 1$. In diesem Fall ist $I = 0$. Man gewinnt keine Information, da der Eintritt des Ereignisses von vornherein feststeht.

(b) $N = 2$. $p_1 = p_2 = 1/2$. Beide Ereignisse treten mit der gleichen Wahrscheinlichkeit ein. Durch Einsetzen erhält man $I = 1$ bit.[2]

Aufgaben:

(a) Ein Hund hält mit sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit von $p_n = 1/128$ auf den 128 Fliesen am Boden eines rechteckigen Raumes, der doppelt so lang wie breit ist, auf. Wie groß ist die mittlere Information der Feststellung des Aufenthaltsorts?[3]

(b) Erinnert die Definition der Information nicht an die Entropie? Schreiben Sie in einem Satz, warum größere Entropie mit mehr Information zu identifizieren ist.

(c) Ein Fabrikant möchte 3000 Bälle in den Farben rot, grün und blau produzieren. Wieviele Bälle von jeder Farbe muss er herstellen, wenn er möglichst viele verkaufen will, über die Beliebtheit der verschiedenen Farben bei Kindern aber keine Erhebungen angestellt hat? Versuchen Sie zuerst durch Argumentieren auf ein Ergebnis zu kommen und berechnen Sie dann die Information dieser Verteilung.

13. **Maximierung der Entropie unter Nebenbedingungen**
Die Entropie ist definiert als

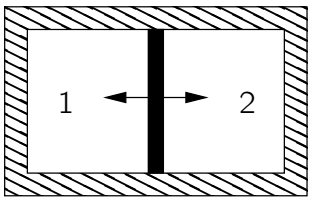
$$S = -k \langle \ln \rho \rangle .$$

Finden Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $f(x)$ maximaler Entropie

$$S = -k \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln (f(x)) \, \mathrm{d}x$$

unter den Nebenbedingungen $\langle x \rangle = 0$ und $\langle x^2 \rangle = a$. Finden Sie für $f(x)$ eine weitere Nebenbedingung selbst. Benutzen Sie die Methode der Lagrange-Multiplikatoren.

14. **Maximierung der Entropie II**
Aus der Vorlesung kennen Sie die mikrokanonische, die kanonische und die großkanonische Gesamtheit. Wir betrachten nun zwei abgeschlossene Systeme, zwischen denen eine für Teilchen undurchlässige, aber bewegbare Wand ist. Maximieren Sie die Entropie unter der Nebenbedingung, dass die Gesamtenergie $E = E_1 + E_2$ und das Gesamtvolumen $V = V_1 + V_2$ konstant sind. Was ist der Gleichgewichtsparameter der Energie (des Volumens)?



[2] bit ist die Einheit der Information und entspricht einer 0 oder 1 Entscheidung.

[3] Man sieht, dass in der Definition von I keine Bewertung der Information (etwa nützlich – unnütz) enthalten ist.