INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. Björn Willenberg
M.Sc. Boris Celan

Rechenmethoden II SoSe 2013

5. Übungsblatt Abgabe: Di, 14.05.2013 bis 11.30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-braunschweig.de/theophys/edu/sose13/rm213`.

15. **Potentiale**

(a) Verifizieren Sie den Satz von Stokes anhand der Oberfläche O und des Vektorfelds $\vec{F} = m\omega^2\vec{r}$, wobei m und ω^2 zwei Konstanten sind. Die Parameterisierung der Oberfläche O sei gegeben durch:

$$\begin{aligned} x &= \sin(t)\, r \\ y &= \sin(2t)\, r^2 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

mit $0 \leq t \leq \pi$ und $0 \leq r \leq 1$. Der Rand der Oberfläche ∂O ist gegeben durch die gleiche Parametrisierung, jedoch mit $r = 1$.

(b) Begründen Sie, dass ein skalares Potential ϕ mit der Eigenschaft $\vec{F} = \operatorname{grad}\phi$ existiert. Berechnen Sie ϕ.

(c) Sei $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein skalare Funktion und sei $\vec{A}$ ein Vektorpotential zum Vektorfeld $\vec{B}$, d.h. es gelte $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$. Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad}\psi$ ebenfalls Vektorpotential zum Vektorfeld $\vec{B}$ ist.

16. **Divergenz in Polarkoordinaten**

Sie kennen die verschiedenen Differentialoperatoren div , rot , grad bereits für das kartesische Koordinatensystem. Wir führen nun anstelle der kartesischen Koordinaten zylindrische Polarkoordinaten ein:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \to \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ z \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die normierten Basisvektoren $(\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$ des neuen Koordinatensystems an und zeigen Sie, dass diese ebenso ein Orthonormalsystem bilden. ($\vec{e}_\alpha \propto \partial\vec{r}/\partial\alpha$.)

(b) Leiten Sie die Divergenz in Polarkoordinaten her. Wenden Sie hierzu die Divergenz auf ein Vektorfeld $\vec{A}$ an. Gehen Sie wie folgt vor:

- Verschaffen Sie sich die Komponenten von $\vec{A}$ in den Richtungen der neuen Basisvektoren, also A_r, A_ϕ, A_z. Stellen Sie $\vec{A}$ in diesen Komponenten dar.
- Wenden Sie die Divergenz (in kartesischen Koordinaten) an, benutzen Sie die Kettenregel, um Ableitungen von $\vec{A}$ nach r, ϕ, z zu bekommen.
- Terme wie $\partial r/\partial x$ können Sie berechnen, indem Sie die Jacobi-Matrix J invertieren:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix}, \qquad J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Bitte wenden! →

17. **Maximumsprinzip**
Betrachten Sie die folgenden Funktionen auf dem Gebiet $x, y \in [-1, 1]$.

- $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$
- $g(x, y) = \ln \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$,
- $h(x, y) = \cos(x)\cosh(y) + \cos(y)\cosh(x)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionen harmonisch sind, d.h. dass $\Delta f = 0$ gilt (Δ ist der Laplace-Operator).

(b) Plotten Sie die Funktionen mit einem geeigneten Programm. Was fällt Ihnen bezüglich der Extrema auf?