Dr. R. Steinigeweg
Dipl.-Phys. B. Willenberg

4. Übungsblatt — Abgabe: 21./22. November 2012 in der Übung

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-braunschweig.de/theophys/edu/wise-1213/rm11213`.

10. **Taylor-Reihen**
Entwickeln Sie die folgenden Funktionen jeweils in eine Taylor-Reihe um x_0:

(a) $f(x) = \sin(x), \quad x_0 = \pi/2$

(b) $f(x) = \cos(x), \quad x_0 = 0$

(c) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1,\ x_0 = 0$

(d) $f(x) = \ln(1-2x), \quad x_0 = 0$

Für welche x konvergieren die Reihen?

11. **Lennard-Jones-Potential**
In der Molekülphysik wird oft das Lennard-Jones-Potential benutzt, um die Wechselwirkung zwischen Molekülen im Abstand r zu beschreiben. Es hat einen repulsiven und einen attraktiven Anteil und ist gegeben durch

$$V(r) = 4\,\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6} \right],$$

dabei sind ε und σ stoffspezifische Konstanten.

(a) Entwickeln Sie $V(r)$ bis zur zweiten Ordnung in eine Taylor-Reihe um die Gleichgewichtslage r_0. Sie haben nun ein effektives Potential $V_{\text{eff}}(r - r_0)$ für kleine Abweichungen von der Gleichgewichtslage.

(b) Plotten Sie $V(r)$ und $V_{\text{eff}}(r)$ mit einem geeigneten Programm[1]. Wählen Sie $\sigma = \varepsilon = 1$.

12. **Relativistische Bewegungsenergie**
Nach der speziellen Relativitätstheorie hat ein Teilchen der Masse m die Gesamtenergie $E = mc^2$. Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit, die Masse hängt von der Geschwindigkeit v ab:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad m_0 : \text{Ruhemasse}.$$

Die Ruheenergie des Teilchens ist $E_0 = m_0 c^2$. Die kinetische Energie ist als

$$E_{\text{kin}} = E - E_0 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

definiert. Entwickeln Sie E_{kin} nach v/c um $v/c = 0$ bis zur ersten relativistischen Korrektur. *Hinweis:* Um sich die Rechnung einfacher zu machen, können Sie auch $x := v^2/c^2$ substituieren und nach x entwickeln. Vergessen Sie nicht die Rücksubstitution.

Bitte wenden! →

[1] Z.B. Gnuplot, Mathematica, MATLAB, Xmgrace, . . .

13. **Regel von l'Hospital**
Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\ln(x+1)}$

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{\exp(x^2)-\exp(x)}{x-1}$

(c) $\lim_{x\to 1} \frac{x\exp(x)-\exp(2x-1)}{x(x-1)^2}$

14. **Planck'sches Strahlungsgesetz**
Das Planck'sche Strahlungsgesetz

$$u(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} \tag{1}$$

gibt die spektrale Verteilung der Energiedichte an. Dabei ist $\hbar$ das Planck'sche Wirkungsquantum, c die Lichtgeschwindigkeit, k_B die Boltzmann-Konstante, T die Temperatur und ω die Kreisfrequenz der elektromagnetischen Strahlung.

(a) *Bonusaufgabe:* Entwickeln Sie (1) für kleine Frequenzen ($\hbar\omega \ll k_B T$) bis zur quadratischen Ordnung in ω. Sie erhalten das Rayleigh-Jeans-Gesetz:

$$u(\omega) = \frac{k_B T}{\pi^2 c^3} \omega^2.$$

(b) Nähern Sie den Nenner von (1) für kleine und für große ω, um ebenfalls das Rayleigh-Jeans-Gesetz sowie das Wien'sche Strahlungsgesetz zu erhalten.

Hinweis zu (a): Substituieren Sie $x := \frac{\hbar\omega}{k_B T}$ und absorbieren Sie alle Vorfaktoren in einer einzigen Konstanten. Entwickeln Sie dann um $x = 0$. Um in der Taylorentwicklung die Koeffizienten zu berechnen, müssen sie (mehrfach) l'Hospital anwenden.