Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. Wolfram Brenig
Niklas Casper
Erik Wagner

Elektrodynamik SS 2018

4. Übungsblatt

Abgabe: Do, 03.05.2018 bis 09:45 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-bs.de/theophys/edu/sose18/edyn`.

17. **Wissensfragen (3 Punkte)**

    (a) Geben Sie den Residuensatz an.

    (b) Wie lautet der Levi-Civita-Tensor?

    (c) Was ist ein polarer Vektor?
    Was ist ein axialer Vektor (Pseudovektor)?

18. **Eichtransformation (5 Punkte)**

    (a) Zeigen Sie, dass die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ invariant unter Eichtransformationen sind.

    (b) Betrachten Sie das Vektorpotential

    $$\vec{A} = \alpha(x_1 x_2, -x_2 x_3, -x_1 x_3), \qquad \alpha = const$$

    es gelte $\Phi \equiv 0$.

    i. Bestimmen Sie die magnetische Induktion $\vec{B}$.

    ii. Zeigen Sie, dass das Vektorpotential $\vec{A}$ nicht die Coloumb-Eichung erfüllt.

    iii. Ermitteln Sie eine Eichtransformation, so dass das umgeeichte Vektorpotential $\vec{A}'$ der Coloumb-Eichung genügt. Zeigen Sie zunächst, dass die gesuchte Eichtransformation Lösung einer Poisson-Gleichung sein muss. Geben Sie $\vec{A}'$ an.

19. **Pseudovektor (2 Punkte)**

    (a) Zeigen Sie, dass das Kreuzprodukt eines Pseudovektors und eines polaren Vektors ein polarer Vektor ist.

    (b) Nutzen Sie (a) und die Maxwell Gleichungen, um zu zeigen, dass die magnetische Induktion $\vec{B}$ ein Pseudovektor ist.

Bitte wenden! →

20. **Greensche Funktion des d'Alembert-Operators (10 Punkte)**
Es soll eine partikuläre Lösung der Wellengleichung

$$\Box\Phi(\vec{r},t) = \Delta\Phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(\vec{r},t) = -4\pi\rho(\vec{r},t)$$

berechnet werden. Gesucht ist die Greensche Funktion, die

$$\Box G(\vec{r},t) = \Delta G(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(\vec{r},t) = -4\pi\delta(\vec{r},t)$$

erfüllt.

(a) Zeigen Sie, dass für die Fouriertransformierte

$$G(\vec{k},\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int_{\mathbb{R}^3} d\vec{r}^3 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} G(\vec{r},t)$$

gilt:

$$G(\vec{k},\omega) \propto \frac{1}{\omega^2 - k^2c^2}\,. \tag{1}$$

(b) Führen Sie zuerst die Fourier-Rücktransformation von Gl. (1) bezüglich ω aus. Dazu bietet es sich an, ω als komplexe Zahl anzunehmen und den Residuensatz zu verwenden. Die Integrationskontur in der komplexen Ebene schließt die reelle Achse ein und wird entweder durch einen Halbbogen in der unteren (Kontur C) oder oberen Halbebene (Kontur C') geschlossen. Die Pole von $G(\vec{k},\omega)$ liegen auf der reellen Achse. Um Singularitäten zu vermeiden, nehme man in Gleichung (1) die Ersetzung $\omega \to \omega + i\eta, \eta > 0$ vor. Nach der Integration bilde man den Grenzwert $\eta \to 0$. Skizzieren Sie C, C' und die Pole des Integranden. Integrieren Sie entlang der Kontur C.

Hinweis: Überlegen Sie sich, für welche Zeiten t das Integral entlang C bzw. C' existiert.

(c) Die Rücktransformation bezüglich $\vec{k}$ in den Ortsraum führt man am einfachsten mit Hilfe von sphärischen Polarkoordinaten im $\vec{k}$-Raum aus. Legen Sie die k_z-Achse parallel zu $\vec{r}$.

(d) Interpretieren Sie die Zeitabhängigkeit Ihres Ergebnisses fur $G(\vec{r},t)$. Was erhält man, wenn man entlang C' integriert?