INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. W. Brenig
Dipl.-Phys. Björn Willenberg
M.Sc. Boris Celan

Rechenmethoden II — SoSe 2013

4. Übungsblatt — Abgabe: Di, 07.05.2013 bis 11.30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-braunschweig.de/theophys/edu/sose13/rm213`.

12. **Linien- und Oberflächenintegrale II – Halbkugel**
Gegeben sei eine Halbkugel $\mathcal{K} = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\,;\; z \geq 0\}$ sowie das Vektorfeld $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ 2x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie rot $\vec{F}$ und skizzieren Sie die Halbkugel $\mathcal{K}$.

(b) Die Oberfläche der Halbkugel besteht aus zwei Teilen, zum einen aus der oberen Hälfte der Kugeloberfläche und zum anderen aus einer Kreisscheibe. Berechnen Sie das Integral

$$\int \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{O} = \int \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}O$$

für beide Oberflächen.

(c) Berechnen Sie das geschlossene Linienintegral entlang des Randes der Kreisscheibe

$$\oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Hinweis: Benutzen Sie für die Aufgabenteile (b) und (c) Kugelkoordinaten.

13. **Gauß'scher Integralsatz II**

(a) Verifizieren Sie den Gauß'schen Integralsatz für das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} xz \\ yz^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und einen Würfel mit $|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1$.

(b) Gegeben sei ein Vektorfeld $\vec{F}(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta\, \vec{e}_\theta$.

i. Begründen Sie, warum der Fluss des Vektorfeldes durch eine Kugelschale um den Ursprung mit Radius R verschwindet.

ii. Bestätigen Sie diese Aussage mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß.

14. **Partielle Integration in 3D**
Zeigen Sie, dass die folgende Beziehung gilt:

$$\int_V \phi \operatorname{div} \vec{f}\, \mathrm{d}V = \int_{\partial V} \phi \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{O} - \int_V \vec{f} \cdot \operatorname{grad} \phi\, \mathrm{d}V.$$