



3. Übungsblatt

Abgabe: Di, 06.11.2018 bis 11:30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter <https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1819/thermo1819>.

11. Wissensfragen (2 Punkte)

Bitte benennen Sie alle verwendeten Symbole und Größen.

- (a) Was ist ein Dichteoperator?
- (b) Was ist ein mikrokanonisches Ensemble?

12. Dichteoperatoren von Spin- $\frac{1}{2}$  Teilchen (8 Punkte)

Für die Komponenten  $S^\alpha$  mit  $\alpha \in \{x, y, z\}$  des **Spinoperators**  $\vec{S}$  eines quantenmechanischen Spin- $\frac{1}{2}$  Teilchens gilt  $[S^\alpha, S^\beta] = i\hbar \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S^\gamma$  und  $\vec{S}^2 = \sum_\alpha S^\alpha S^\alpha = \frac{3\hbar^2}{4}$ .

- (a) Zeigen Sie, dass für die  $S^\alpha$  gilt:  $\text{Sp } S^\alpha = 0$ .
- (b) i. Welche Bedingung muss ein **Dichteoperator** für ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen erfüllen?  
ii. Beweisen Sie, dass

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{u} \cdot \vec{\sigma})$$

mit  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  einem Vektor mit den drei Paulimatrizen als Komponenten und  $\vec{u}$  einem reellen Parametervektor, die von Ihnen aufgestellten Bedingungen erfüllt. Nehmen Sie an, dass  $\rho \geq 0$  für geeignete Werte von  $\vec{u}$  erfüllt ist.

- (c) Zeigen Sie, dass  $\vec{u}$  identisch ist mit dem Mittelwert  $\langle \vec{\sigma} \rangle = \text{Sp}(\rho \vec{\sigma})$ .
- (d) Der Dichteoperator habe die Eigenwerte  $\rho_1$  und  $\rho_2$ . Drücken Sie  $\text{Sp } \rho$  und  $\text{Sp } \rho^2$  durch  $\rho_1$  und  $\rho_2$  aus.
- (e) Begründen Sie, dass  $u := |\vec{u}| \leq 1$  sein muss.  
Welche Eigenschaft von  $\vec{u}$  charakterisiert einen reinen Zustand?  
*Hinweis:* Betrachten Sie zunächst  $(\vec{u} \cdot \vec{\sigma})^2$  und vereinfachen Sie damit  $\rho^2$ . Nutzen Sie dann Ihre Ergebnisse aus (d), um die Eigenwerte in Abhängigkeit von  $u$  auszudrücken.
- (f) Nun betrachte man  $N$  Teilchen in einem Neutronenstrahl. Die Hälfte der Teilchen sei in Richtung der positiven  $x$ -Achse, die andere Hälfte in Richtung der negativen  $y$ -Achse ausgerichtet.
  - i. Geben Sie den Dichteoperator an.
  - ii. Wie sieht der Dichteoperator aus, wenn man über die Spins der zweiten Hälfte gar nichts weiß?

Bitte wenden! →

13. **Eigenstate Thermalization Hypothesis (ETH) (7 Punkte)**

Ein quantenmechanisches System sei aus 'typischer' kondensierter Materie zusammengesetzt und werde durch einen Hamiltonoperator  $H = \sum_{\alpha} E_{\alpha} |E_{\alpha}\rangle \langle E_{\alpha}|$  mit Eigenzuständen  $|E_{\alpha}\rangle$  zu Eigenenergien  $E_{\alpha}$  beschrieben.

- (a) Eine Studierende bringt das System am Anfang ihrer Bachelorarbeit ganz vorsichtig, z.B. in den ersten 5 Tagen (wie auch immer), in einen Zustand  $|\Psi(t=0)\rangle$ .

Schätzen Sie grob ab, aus wie vielen Eigenzuständen der Zustand  $|\Psi(t=0)\rangle$  typischerweise superponiert ist.

*Hinweis:* Erinnern Sie sich an die Unschärferelation.

Nutzen Sie ihre Ergebnisse aus Aufgabe 9, um die Zustandsdichte abzuschätzen.

- (b) Über welche Zeitspanne müsste die Studierende den Zustand präparieren, damit es ein einzelner Energieeigenzustand werden kann?

Eine Form der sog. „Eigenstate Thermalization Hypothesis“ (ETH) besagt, dass sich der **quantenmechanische Erwartungswert**  $\langle \hat{A} \rangle(t) = \langle \Psi(t) | \hat{A} | \Psi(t) \rangle$  einer 'typischen' Observablen  $\hat{A}$  in einem 'typischen' Zustand  $|\Psi(t=0)\rangle$  mit Energieunschärfe  $\Delta E$  im Limes langer Zeiten so verhält wie der **thermodynamische statistische Mittelwert** in einem mit demselben Energieintervall  $\Delta E$  gleichverteilten Ensemble  $\rho$  (mikrokanonisches Ensemble) - wenn die Diagonalmatrixelemente  $\langle E_{\alpha} | \hat{A} | E_{\alpha} \rangle$  hinreichend schwach variierende Funktionen der Energie  $E_{\alpha}$  sind.

- (c) Zeigen Sie nun, dass für ein System, das in einem Zustand  $\Psi$  zur Zeit  $t = 0$

$$|\Psi(t=0)\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |E_{\alpha}\rangle \quad (1)$$

präpariert wird, der **Langzeitlimes des quantenmechanischen Erwartungswerts**  $\bar{A}$  einer Observablen  $\hat{A}$ , definiert als

$$\bar{A} \equiv \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \langle \Psi(t) | \hat{A} | \Psi(t) \rangle dt, \quad (2)$$

durch

$$\bar{A} = \sum_{\alpha} |c_{\alpha}|^2 A_{\alpha\alpha} \quad (3)$$

gegeben ist. Dabei sind die  $A_{\alpha\alpha} = \langle E_{\alpha} | \hat{A} | E_{\alpha} \rangle$ , die Zustände  $|E_{\alpha}\rangle$  Eigenzustände des Hamilton-Operators zur Energie  $E_{\alpha}$  und  $c_{\alpha} \in \mathbb{C}$ .

*Hinweis:* Überlegen Sie sich, wie  $|\Psi(t)\rangle$  mit  $|\Psi(t=0)\rangle$  zusammenhängt.

- (d) Der **Mittelwert im mikrokanonischen Ensemble** der Observablen  $\hat{A}$  ist gegeben durch

$$\langle A \rangle_{\text{mikro}} \equiv \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{\alpha'=1}^{\mathcal{N}} A_{\alpha'\alpha'}, \quad (4)$$

wobei die Summe über alle Zustände  $|E_{\alpha'}\rangle$  in einem kleinen Energieintervall  $\Delta E$  um  $E$  mit insgesamt  $\mathcal{N}$  Zuständen läuft.

Zeigen Sie, dass unter den Annahmen der ETH gilt:

$$\bar{A} \approx \langle A \rangle_{\text{mikro}} \quad (5)$$

14. **Barometrische Höhenformel (3 Punkte)**

Die barometrische Höhenformel beschreibt die Abnahme des Luftdruckes  $P$  bzw. der Teilchendichte  $n$  mit der Höhe  $z$ .  $m$  ist die Masse eines Teilchens.

- (a) Leiten Sie die Beziehung zwischen Höhe und Druck bzw. Teilchendichte her.
- (b) Ziehen Sie nun eine lineare Temperaturänderung  $T(z) = T(z_0) - \alpha(z - z_0)$  mit der Höhe in Betracht und korrigieren Sie Ihr Ergebnis aus (a).

