Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. W. Brenig
M.Sc. Boris Celan

Quantentheorie WS 2014/15

3. Übungsblatt Abgabe: Di, 11.11.2014 bis 11.30 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter `https://www.tu-bs.de/theophys/edu/wise-1415/quanten`.

8. **Der eindimensionale Potentialtopf I: Gebundene Zustände (14 Punkte)**
Wir betrachten ein Teilchen in dem folgenden eindimensionalen Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} U & \text{für } x < -a, \quad \text{(I)} \\ 0 & \text{für } -a < x < a, \quad \text{(II)} \\ U & \text{für } x > a, \quad \text{(III)} \end{cases} \quad \text{mit } U = \text{const} > 0.$$

Es sollen einige Eigenschaften der Lösungen der eindimensionalen, stationären Schrödinger-Gleichung für gebundene Zustände, d.h. $0 < E < U$ diskutiert werden.

(a) Skizzieren Sie das Potential $V(x)$ und markieren Sie die drei Bereiche (I)-(III).

(b) Als allgemeine Lösung für die Bereiche (I)-(III) setze man an

$$\Phi_{\text{I}}(x) = Ae^{qx} + \tilde{A}e^{-qx},$$
$$\Phi_{\text{II}}(x) = Be^{ikx} + Ce^{-ikx},$$
$$\Phi_{\text{III}}(x) = \tilde{D}e^{qx} + De^{-qx}.$$

Bestimmen Sie q und k als Funktion der Energie E.
Warum müssen die Koeffizienten $\tilde{A}$ und $\tilde{D}$ null sein?

(c) Aus der Vorlesung wissen Sie, dass sowohl $\Phi(x)$ als auch $\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}$ stetig sein müssen. Dies gilt auch für die Unstetigkeitsstellen von $V(x)$. Stellen Sie damit ein Gleichungssystem für A, B, C und D auf.

(d) Wir wollen die nichttrivialen Lösungen dieses Systems betrachten. Zeigen Sie, dass es genau zwei Arten von solchen Lösungen gibt, symmetrische und asymmetrische, ohne diese Lösungen explizit zu bestimmen.

(e) Zeigen Sie, dass für die symmetrischen Lösungen aus Aufgabenteil (d)

$$q = k \tan(ka)$$

und für die asymmetrischen Lösungen

$$q = -k \cot(ka)$$

gelten muss.Zeigen Sie, dass außerdem gilt

$$q = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}U - k^2}.$$

Bitte wenden! →

(f) Mithilfe der Gleichungen aus Aufgabenteil (e) lassen sich prinzipiell die Energieeigenwerte E_n bestimmen. Jedoch sind die Gleichungen transzendent. Man kann aber einige Eigenschaften aus einer grafischen Lösung ableiten. Begründen Sie mittels der grafischen Lösung:

i. Es gibt immer mindestens einen und höchstens endlich viele diskrete Energieeigenwerte E_n.

ii. Der Zustand mit der niedrigsten Energie ist symmetrisch.

iii. Die folgenden Zustände sind immer abwechselnd asymmetrisch und symmetrisch.

9. **Ehrenfestsche Theorem in der Quantenmechanik (6 Punkte)**

Das Ehrenfestsche Theorem sagt aus, dass Erwartungswerte die kanonischen Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik erfüllen.
Wir wollen hier eine Form des Ehrenfestschen Theorems für einen eindimensionalen Hamilton-Operator der Form

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

mit reelem $V(x)$ verifizieren. Der Erwartungswert einer Größe A ist definiert als

$$\langle A \rangle = \int \mathrm{d}x \, \Psi^*(x,t) \, A \, \Psi(x,t),$$

wobei $\Psi(x,t)$ eine normierte Lösung ($\int \mathrm{d}x \, \Psi^*(x,t)\Psi(x,t) = 1$) der Schrödingergleichung ist.
Zeigen Sie

(a)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle p \rangle = -\left\langle \frac{\partial H}{\partial x} \right\rangle,$$

(b)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle x \rangle = \left\langle \frac{\partial H}{\partial p} \right\rangle.$$

Verwenden Sie dazu

- p und x hängen nicht explizit von der Zeit ab, d.h. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x = 0$
- Schrödingergleichung für Ψ und Ψ^*
- partielle Integration