

3. Übungsblatt

Abgabe: Do, 26.04.2018 bis 09:45 Uhr, Kasten neben A316

Übungsblätter gibt es unter <https://www.tu-bs.de/theophys/edu/sose18/edyn>.

13. Ein singuläres Vektorpotential (5 Punkte)

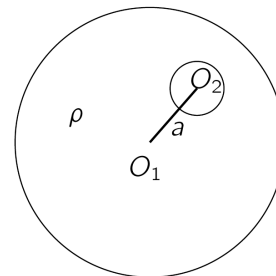
Betrachtet wird ein kugelsymmetrisches Vektorfeld $\vec{E} = q\vec{r}/r^3$. Für $r > 0$ gilt $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, sowie $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$. Wir definieren in Kugelkoordinaten

$$\vec{C} := q \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta} \vec{e}_\phi.$$

- In welchem Teilraum von $G := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 | r > 0\}$ ist $\vec{C}$ wohldefiniert?
- Verifizieren Sie, dass $\vec{E}$ als $\vec{E} = \nabla \times \vec{C}$ geschrieben werden kann.
- Wenn $\vec{E} = \nabla \times \vec{C}$ in das Flussintegral $\Phi = \oint_{r=R} d\vec{A} \cdot \vec{E}$ eingesetzt wird, kann Φ laut Stokes als Linienintegral ausgedrückt werden. Dabei wird um den Punkt der Oberfläche integriert, bei dem $\vec{C}$ singulär ist. Zeigen Sie, dass der richtige Wert $\Phi = 4\pi q$ sich auf die Weise wiederherstellen lässt.

14. Superpositionsprinzip (5 Punkte)

Eine Kugel mit Radius R_1 ist mit Ausnahme eines kugelförmigen Hohlraums mit der konstanten Ladungsdichte ρ aufgeladen. Der Hohlraum hat den Radius R_2 , sein Mittelpunkt O_2 befindet sich in der Entfernung a vom Mittelpunkt O_1 der großen Kugel ($a + R_2 < R_1$). Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ sowie das Potential Φ in einem beliebigen Punkt im Inneren des Hohlraums. Welchen Wert hat Φ im Mittelpunkt der Hohlkugel?



Hinweise:

- Berücksichtigen Sie bei der Berechnung des elektrischen Feldes die Kugelsymmetrie und den Gauß'schen Satz.
- Das Potential der gesamten Anordnung soll im Unendlichen verschwinden.

15. Kontinuitätsgleichung (5 Punkte)

Betrachten Sie eine diskrete Verteilung von Punktladungen

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$$

mit zeitabhängigen Orten $\vec{r}_i(t)$ der Ladungen $q_i(t)$. Was folgt aus der Kontinuitätsgleichung für $q_i(t)$?

Bitte wenden! →

16. **Homogen geladene Kugeloberfläche (5 Punkte)**

Die Oberfläche einer Kugel mit Radius R trägt die konstante Flächenladungsdichte σ_0 . Der Mittelpunkt der Kugel soll der Koordinatenursprung sein. Wir unterscheiden die Raumbereiche I ($r < R$) und II ($r > R$) mit $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

- (a) Berechnen Sie das Potenzial $\Phi(\vec{r})$ in den Raumbereichen I und II aus dem Poisson-Integral

$$\Phi(\vec{r}) = \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

und geben Sie dann das elektrische Feld $\vec{E}$ an.

- (b) Ermitteln Sie das Potenzial $\Phi(\vec{r})$, indem Sie die Laplace-Gleichung unter Ausnutzung von Symmetrien in den Bereichen I und II separat lösen. Bestimmen Sie die auftretenden Integrationskonstanten aus den Randbedingungen:

- $\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(\vec{r}) = 0$.
- Φ ist stetig bei $r = R$.

Welche zusätzliche Bedingung kommt im Bereich $r < R$ hinzu? Skizzieren Sie Φ als Funktion von r .

Hinweis: Eine Integrationskonstante bleibt (scheinbar) frei. Legen Sie diese durch Vergleich mit Ihren Ergebnissen aus Teil (a) fest.

- (c) Verwenden Sie den Gauß'schen Satz, um das elektrische Feld $\vec{E}$ in den Bereichen I und II zu bestimmen. Bestimmen Sie dann das Potenzial. Wie verhält sich das elektrische Feld bei $r = R$? Skizzieren Sie $|\vec{E}|$ als Funktion von r .